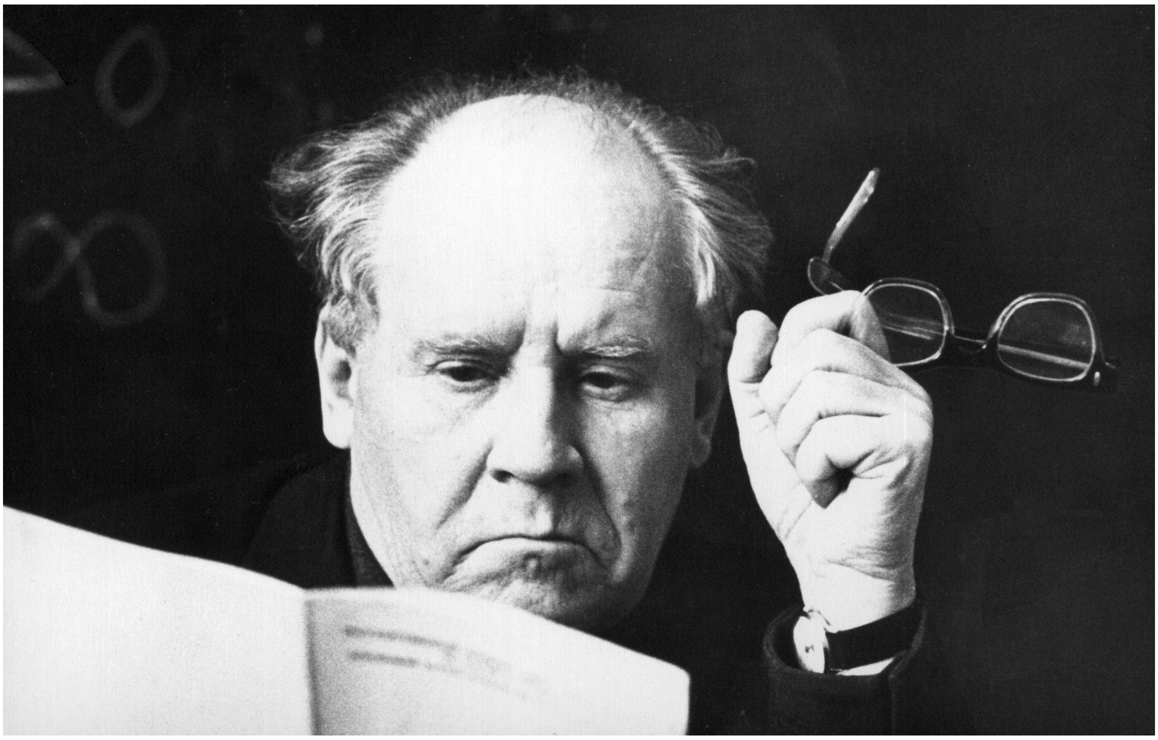
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2023)

Материалы конференции
(Могилев, 23 – 27 мая 2023 года)

В двух частях

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2023

УДК 517.9:001(045)
ББК 22.161.6:73
Д22

Конференция проводится при финансовой поддержке
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований

Д22 **XXI Международная** научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023): материалы конф.: в 2 ч. / Ин-т мат. нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. — Ч. 1. – 146 с.
ISBN 978-985-492-295-9 (ч. 1).

Сборник содержит доклады, представленные на XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2023) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

УДК 517.9:001(045)

ББК 22.161.6:73

ISBN 978-985-492-295-9 (ч. 1)
ISBN 978-985-492-294-2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y'-y^2)y^2y''' = (1-1/\nu)y^2(y'')^2 + a_1y(y')^2y'' + a_2(y')^4 + a_3y^3y'y'' + \\ + a_4y^2(y')^3 + a_5y^5y'' + a_6y^4(y')^2 + a_7y^6y' + a_8y^8, \tag{1}$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Этим уравнением может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$y' = uy^2, (u-1)u'' = (1-1/\nu)u'^2 - p(u)u'y - q(u)y^2, \tag{2}$$

где $p(u) = (2-a_1+\frac{4}{\nu})u^2 - (a_3+6)u - a_5, q(u) = (2-2a_1-a_2+\frac{4}{\nu})u^4 - (2a_3+a_4+ + 6)u^3 - (2a_5+a_6)u^2 - a_7u - a_8$. При $p(1) = q(1) = 0$ Пенлеве-анализ уравнения (1) проводился в [1,2]; при $\nu = \infty, p(1) \neq 0$ – в [3,4]; в [5] получены некоторые необходимые условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1). В [6] получены необходимые условия наличия целых резонансов в частном случае, при этом выписаны некоторые уравнения, удовлетворяющие найденным условиям.

Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) при

$$2-2a_1-a_2+\frac{4}{\nu} = 0. \tag{3}$$

Применяя метод малого параметра Пенлеве к системе (2), доказана

Лемма. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений уравнения (1) при условии (3) необходимо* $q(u) \equiv 0$.

Используя метод малого параметра Пенлеве и результаты Пенлеве-анализа рациональных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, доказана

Теорема. *Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) при условии (3) необходимо и достаточно,чтобы оно имело вид*

$$(y'-y^2)y^2y''' = (1-\tfrac{1}{\nu})y^2(y'')^2 + (2-\mu+\tfrac{4}{\nu})y(y')^2y'' + \\ +2(\mu-1-\tfrac{2}{\nu})y'^4 + (\mu-6)y^3y'y'' + 2(3-\mu)y^2(y')^3,$$

где пара (ν,μ) *принимает один из следующих видов:* $(\nu,0)$, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\}$; $(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(3,1)$.

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.
2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.
3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.
4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.
5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек.* В сб. матер. Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея, (17–18 апреля 2014 г., Брест, Беларусь). (Под общ. ред. Н.Н. Сендера) Брест: БрГУ. 2014. С. 11–13.
6. Adjabi Y., Jrad F., Kessi A., Mugan U. *Third order differential equations with fixed critical points* Stud. Appl. Math. 2009. Vol. 208. № 1. P. 238–248.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, И.П. Мартынов, М.В. Мисник

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y' - y^2)y''' = (1 - 1/\nu)(y'')^2 - 2yy'y'', \tag{1}$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Этим уравнением может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Найдем необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1), укажем в каких функциях выражается решение полученного уравнения. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$y = -\frac{1 + \frac{2}{\nu}}{z - z_0} + ... + h_r(z - z_0)^{r-1} + ...,$$

где z_0, h_r – произвольные постоянные, тогда уравнение для определения r примет вид

$$(r + 1)(r^2 - (\nu + 3)r - \nu - 2) = 0. \tag{2}$$

Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) будем требовать, чтобы корни уравнения (2) были целыми, различными, отличными от 0 [1,2]. Это требование выполнено только при $\nu = -8$. В этом случае первый интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y'' = -\frac{8}{z - K}(y' - y^2), \tag{3}$$

где K – произвольная постоянная. В (3) положим $y = -\frac{3}{4}t^3u(t) + \frac{3}{4}t$, где $t = -\frac{1}{z-K}$, тогда для $u(t)$ получим уравнение

$$\ddot{u} = 6u^2, \tag{4}$$

где $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$. Запишем первый интеграл уравнения (4): $\dot{u}^2 = 4u^3 + C$, где C – произвольная постоянная. Таким образом, доказана

Теорема. *Уравнение (1) обладает свойством Пенлеве при* $\nu = -8$ *, причем его общее решение выражается через эллиптическую функцию.*

Обозначим $y = \frac{3}{4}w$, тогда (3) примет вид

$$w'' = -\frac{8}{z-K}w' + \frac{6}{z-K}w^2. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет рациональное решение вида $w = \frac{a}{(z-a-K)^2} - \frac{1}{z-a-K}$, где a – произвольная постоянная.

Литература

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type II* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. № 5. P. 1006–1015.

2. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О применении рядов Лорана для представления решений дифференциальных уравнений* // Научные исследования преподавателей факультета математики и информатики: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: И.П. Мартынов (отв. ред.) [и др.]. Гродно: ГрГУ, 2010. С. 37–40.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина

Рассмотрим задачу об обобщенных решениях для уравнения Риккати вида

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0,\ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) с условием $w(z_0) = C \neq 0$ является функцией

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C},$$

однозначно определенной при $z \neq a$. Так как $\gamma \in \mathbb{R}$, то при вещественных $z_0 = x_0$ и C по этой формуле на всей вещественной оси однозначно определено вещественнозначное решение задачи Коши $\frac{1}{\gamma(x-a)}$, имеющее особенность в точке a. Этому решению, которое назовем *формальным*, соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций [1] вида

$$\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}M\delta_a, \tag{2}$$

где M – произвольная постоянная. Уравнение на прямой, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$u'(x) + \gamma u^2(x) = 0. \tag{3}$$

Распределения (2) нельзя подставить в уравнение, так как квадрат такого распределения не определен в классической теории. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений (2) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (3).

В случае дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Тогда семейство аппроксимирующих уравнений имеет гладкие решения, а обобщенным решением исходного уравнения называется предел решений аппроксимирующих уравнений в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Уравнение (3) не содержит обобщенных коэффициентов и для него нужны другие способы построения аппроксимаций. Например, можно использовать аппроксимацию решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями [2].

Определение 1. *Аппроксимацией начального условия* будем называть семейство чисел $C_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, таких, что $C_\varepsilon \to C$ при $\varepsilon \to 0$. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условием $u(x_0) = C$ при заданном способе аппроксимации начального условия, если решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Таким образом, обобщенные решения могут быть определены как пределы аппроксимирующих семейств в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Но это не единственный способ определения обобщенного решения. Рассмотрим другой подход.

Пусть $w(z)$ – решение уравнения (1) на комплексной плоскости. На вещественной прямой $w(z) = u(x,0) + iv(x,0)$, и эту функцию будем рассматривать как вектор-функцию со значениями в $\mathbb{R}^2$: $(u(x), v(x))$. Из уравнения (1) получаем, что указанная вектор-функция является решением системы

$$\begin{cases} u'_x = \gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Если $v(x_0) \to 0$ и $u(x_0) \to C$, то функция $u(x)$ почти всюду сходится к формальному решению уравнения (3). Решения системы (4), удовлетворяющие начальным условиям $u(x_0) = \operatorname{Re} C_\varepsilon$, $v(x_0) = \operatorname{Im} C_\varepsilon$, при $\operatorname{Re} C_\varepsilon \to C$, $\operatorname{Im} C_\varepsilon \to 0$ сходятся к вектор-распределению*

$$\left(\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{\pi}{\gamma}\delta_a \right).$$

Заметим, система (4) связана с уравнением (3) следующим образом:

1) при $v \equiv 0$ система (4) превращается в уравнение (3);

2) при $v(x_0) \neq 0$ система (4) имеет гладкие решения, определенные при всех x;

3) при $v(x_0) \to 0$ решения системы (4) почти всюду сходятся к формальному решению уравнения (3).

Таким образом, систему (4) можно рассматривать как аппроксимацию уравнения (3). Но (4) не единственная система с указанными свойствами. Другие аппроксимирующие системы приводят к другим обобщенным решениям. Например, свойствами 1) – 3) обладает система

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{\beta^2}\gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x), \end{cases} \tag{5}$$

где $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. С помощью этой системы введем понятие обобщенного решения.

Определение 2. Векторное распределение W будем называть *β – обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условием $u(x_0) = C$ при аппроксимации системой (5), если существуют такие $\widetilde{C_1}(\varepsilon) \to C$, $\widetilde{C_2}(\varepsilon) \to 0$, при которых решения $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ аппроксимирующей системы с начальными условиями $u_\varepsilon(x_0) = \widetilde{C_1}(\varepsilon)$, $v_\varepsilon(x_0) = \widetilde{C_2}(\varepsilon)$ являются гладкими на вещественной оси и при $\varepsilon \to 0$ к сходятся к W.

В отличие от случая выше, здесь комплекснозначные функции $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + iu_\varepsilon(x)$ не являются аналитическими, вместо условий Коши-Римана выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теорема 2. *При аппроксимации уравнения (3) системой (5) обобщенными решениями задачи Коши являются распределения*

$$W^{\pm}{}_{\beta} = \left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{1}{\gamma}\beta\pi\delta_a\right)$$

и только они.

Еще один способ аппрокимации задают системы вида

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{6}$$

При фиксированном ε пара функций

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \; v_\varepsilon(x) = \pm\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

есть решение системы (6), причем при $\varepsilon \to 0$ начальные условия стремятся к $(C, 0)$. Это семейство сходится к распределению $\left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), 0\right)$. Заметим, что это распределение не может быть обобщенным решением при аппроксимациях вида (5).

Существование качественно различных аппроксимирующих систем, приводящих к разным обобщенным решениям, связано с уточнением математических моделей рассматриваемых процессов и согласуется с прикладной стороной вопроса.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

2. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения уравнения Риккати* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 2. С. 144–154.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Громак, А.Л. Кухарев

В теории нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных (ОДУ), так и в частных производных (НЧП), мощным инструментом является метод преобразований Беклунда, позволяющий, в частности, по известным решениям строить новые решения. К ОДУ такого типа относятся уравнения Пенлеве, иерархии уравнений Пенлеве [1], а среди уравнений НЧП - солитонные уравнения: Кортевега - де Фриза, sin-Гордона и др. [2].

Рассмотрим иерархию нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\mathcal{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \qquad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где оператор $\mathcal{L}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{N+1}[u] = [(\frac{d^3}{dz^3} + (4\gamma u + \beta_N)\frac{d}{dz} + 2\gamma u_z)\mathcal{L}_N[u], \quad \mathcal{L}_1[u] = u, \; u = u(z), \quad N = 1, 2, ... \quad (2)$$

В уравнении (1) $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)-$ искомая функция, α, β, γ $-$ параметры (здесь и далее $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{N-1})$).

Из (1), (2) имеем уравнения четного порядка, из которых первые три имеют вид

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \quad (3)$$

$$\begin{aligned} w^{(4)} &= -(\beta_1 + 6(\gamma - 1)w')w'' + (6\gamma + 4)w^2w'' + w(z + (4 + 6\gamma)(w')^2) + \\ &+ 2\beta_1 w^3 - 6\gamma w^5 + \alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} &= \alpha - 6s_1\gamma w^5 + 20\gamma^2 w^7 + 2w^3(s_2 - 10\gamma(4 + 3\gamma)(w')^2) - \\ &- 10\gamma(4 + 3\gamma)w^4 w'' - w''(s_2 + 6s_1(\gamma - 1)w' + 10\gamma(3\gamma - 10)(w')^2 + 20(\gamma - 1)w^{(3)}) + \\ &+ w(z + 2s_1(3\gamma + 2)(w')^2 + 40(\gamma^2 - \gamma)(w')^3 + 6(5\gamma + 2)(w'')^2 + 8(5\gamma + 2)w'w^{(3)}) - \\ &- (s_1 + 10(\gamma - 1)w')w^{(4)} + 2w^2((s_1(3\gamma + 2) + 30(\gamma^2 - \gamma)w')w'' + (5\gamma + 2)w^{(4)}), \end{aligned}$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2, s_2 = \beta_1\beta_2$.

Заметим, что уравнение (1) с рекуррентным соотношением (2) для оператора $\mathcal{L}_N$ с ограничением $\gamma = 1$ определяет стандартную иерархию второго уравнения Пенлеве (3) и в этом смысле можно считать иерархию (1) обобщением стандартной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Если ввести функции $q(z) := w' - w^2$, $\Phi(q(z)) := \mathcal{L}_N[q(z)] - z/2$, то уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной системы

$$q(z) := w' - w^2, \; \Phi' + 2w\Phi - \sigma = 0, \quad \sigma = \alpha - 1/2,$$

а для определения функции $q(z)$ имеем уравнение

$$\Phi'' - \frac{(\Phi')^2}{2\Phi} + 2q\Phi + \frac{\sigma^2}{2\Phi} = 0, \quad (5)$$

которое в случае $\gamma = 1$ определяет иерархию уравнения P_{34}, а уравнение $\Phi(q) = 0$ определяет иерархию первого уравнения Пенлеве.

Уравнение (5) инвариантно относительно преобразования

$$S : q(z, \sigma) \to \hat{q}(z, \hat{\sigma}) = q(z, -\sigma),$$

которое используем для построения преобразования Беклунда уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$ $-$ решение уравнения (1) при фиксированных значениях параметров, такое, что $\mathcal{L}_N[w' - w^2] \neq z/2$. Тогда преобразование*

$$B_1 : w \to \tilde{w} = w - \frac{2\alpha - 1}{2\mathcal{L}_N[w' - w^2] - z} \quad (6)$$

определяет решение уравнения (1) при $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (-\alpha + 1, \beta, \gamma)$.

Известно, что в случае $\gamma = 1$ уравнение (1) имеет дополнительную симметрию

$$S : w(z, \alpha, \beta, 1) \to \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, 1) = -w(z, -\alpha, \beta, 1),$$

которая вместе с преобразованием (6) позволяет построить алгебру симметрий Вейля типа $A_1^{(1)}$ для стандартной иерархии второго уравнения Пенлеве. В частности, можно построить рациональные решения для всех $\alpha \in \mathbb{Z}$ и решения Эйри для всех $\alpha = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$. Уравнение (1) в общем случае такой симметрии не имеет. Однако, для некоторых значений параметров уравнение (1) также может иметь дополнительные симметрии. Так, например, для уравнения (4) с ограничением $\beta_1 = 0, \gamma = 1/6$ имеем уравнение

$$w^{(4)} - 5w'w'' - 5w^2w'' - 5w(w')^2 - zw + w^5 - \alpha = 0, \tag{7}$$

которое вместе с симметрией (6) имеет дополнительную симметрию.

Теорема 2. *Пусть $w = w(z,\alpha)$ – решение уравнения (7) при фиксированном значении параметра α, такое, что*

$$R(z,w) = z - w^4 - 4w^2w' - 3(w')^2 + ww'' + w''' \neq 0.$$

Тогда преобразование

$$B_2 : w \to \tilde{w} = w + 2(\alpha+1)/R(z,w)$$

определяет решение уравнения (7) при $\tilde{\alpha} = -\alpha - 2$.

Заметим, что уравнение (7) является уравнением четвертого порядка иерархии (K_2), для которого, используя композиции преобразований B_1 и B_2, можно построить все рациональные решения и специальные классы трансцендентных решений [3], а формулы (1), (2) в этом случае определяют альтернативный метод определения уравнения четвертого порядка иерархии (K_2).

Литература

1. Gromak V.I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve equations.* // CRM Proceedining and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence. 2001. Vol. 29. P. 3-28.

2. Rogers C., Schief W.K. *Backlund and Darboux Transformations. Geometry and modern applications in soliton theory.* Cambridge University Press. Cambridge, 2002.

3. Gromak V.I. *On Fourth-Order Nonlinear Differential Equations with the Painleve Property.* // Differential Equations, 2006. Vol. 42. No. 8. P. 1076–1085.

О ГЛОБАЛЬНОЙ МЕРОМОРФНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ И ЕГО ИЕРАРХИЕЙ

Е.В. Громак, В.И. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, зависящими от решений второго уравнения Пенлеве и решений первых уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения и интегрируемость в замкнутой форме в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями уравнений обобщенной иерархии, которая имеет вид

$$\widetilde{P}_2^{[2N]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \widetilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \qquad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$

где оператор $\widetilde{L}_N$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\widetilde{L}_{N+1}[u] = [(\frac{d^3}{dz^3} + (4u+\beta_N)\frac{d}{dz} + 2u_z)\widetilde{L}_N[u], \quad \widetilde{L}_1[u(z)] = u(z), \quad N = 1,2,...,$$

где $\alpha,\ \beta_N$ – параметры. Тогда для $N = 1,2,3$ последовательно имеем первые три уравнения иерархии:

$$\widetilde{P}_2^{[2]} : w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \tag{2}$$

$$\widetilde{P}_2^{[4]} : w^{(4)} = 10\,w^2w'' + 10\,w(w')^2 - 6\,w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + zw + \alpha, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_2^{[6]} : w^{(6)} &= 2\,w^2(5(\beta_1+\beta_2)w'' + 7w^{(4)}) - w^{(4)}(\beta_1+\beta_2) - 70w^4w'' + \\ &+ w(10(\beta_1+\beta_2)(w')^2 + 42(w'')^2 + 56\,w'w^{(3)}) - (\beta_1\beta_2 - 70(w')^2)w'' \\ &+ 2w^3(\beta_1\beta_2 - 70(w')^2) - 6\,w^5(\beta_1+\beta_2) + 20\,w^7 + zw + \alpha.\end{aligned} \tag{4}$$

Эту иерархию называют обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве, так как первое уравнение этой иерархии, также как и первое уравнение иерархии $P_2^{[2N]}$, есть второе уравнение Пенлеве, а последующие уравнения обобщают соответствующие уравнения иерархии $P_2^{[2N]}$, при этом иерархия $P_2^{[2N]}$ может быть получена из иерархии $\widetilde{P}_2^{[2N]}$ при $\beta = 0,\ \beta = (\beta_1, ..., \beta_{N-1})$ [1]. Известно, что уравнения иерархии при произвольных значениях параметров α, β обладают свойством мероморфного продолжения, т.е. любое локальное голоморфное решение допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения [2].

Одним из основных инструментов исследования аналитических свойств решений уравнения (1) является преобразование Беклунда, которое позволило, в частности, доказать трансцендентность уравнения (2), а также разбить множество решений на три класса: 1. Рациональные решения; 2. Решения Эйри; 3. Трансцендентные решения, т.е. решения, не входящие в первые два класса.

Рациональные решения $N-$го уравнения (1) существуют только при $\alpha \in \mathbb{Z}$. Они порождаются тривиальным решением $w^{[N]} = 0$ при $\alpha = 0$ и последовательным применением к нему преобразования Беклунда. При каждом $\alpha \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно и имеет структуру

$$w_n^{[N]}(z) = \frac{d}{dz}\ln\left(Q_{n-1}^{[N]}/Q_n^{[N]}\right),\ \alpha = n \in \mathbb{N},$$

где полиномы Яблонского-Воробьева $Q_n^{[N]}(z)$ определяются рекуррентным соотношением

$$Q_{n+1}^{[N]}Q_{n-1}^{[N]} = z(Q_n^{[N]})^2 - 2(Q_n^{[N]})^2\widetilde{L}_N[2\frac{d^2}{dz^2}\ln(Q_n^{[N]})],\ Q_0^{[N]} = 1,\ Q_1^{[N]} = z,\ n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Для $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N},$ рациональное решение $w_{-n}^{[N]}(z) = -w_n^{[N]}(z)$ и $w^{[N]} = 0$ для $\alpha = 0$.

Решения второго класса порождаются решениями уравнений $\widetilde{L}_N[w' - w^2] - z/2 = 0$, $\alpha = 1/2$ при последовательном применении к ним преобразований Беклунда. Для уравнения (2) эти решения рациональным образом выражаются через функции Эйри и ее производные.

Произвольное решение $w^{[N]}(z)$ из третьего класса имеет бесконечное число полюсов с целыми вычетами из множества $\{\pm1, \pm2, ..., \pm(N-1)\}$.

В настоящей работе на множестве решений уравнения (1) рассматриваем линейное уравнение

$$u'' + (aw^2 + bw + cw' + \mu)u = 0, \tag{5}$$

где $w(z)$ – фиксированное решение $N-$ го уравнения (1), а $a, b, c, \mu-$ постоянные параметры. Нас интересуют условия на параметры, при выполнении которых любое локальное голоморфное решение уравнения (5) допускает аналитическое продолжение до глобально мероморфного решения, т.е. общее решение уравнения (5) мероморфно или даже рационально. Ясно, что уравнение (5) – уравнение с конечными регулярными особыми точками в полюсах $w(z)$ и для построения фундаментальной системы можно использовать метод Фробениуса. При этом наряду с регулярностью конечных особых точек $z = z_j$ необходима целостность показателей, относящихся к особым точкам и отсутствие в разложениях решений в окрестностях особых точек логарифмов $ln(z - z_j)$. Справедлива

Теорема 1. *Если для уравнения (5), где $w(z)$ – фиксированное решение уравнений (2)–(4), выполняется хотя бы одно из условий*

$$a)\ a = b = c = 0;\quad b)\ a = -1,\ b = 0,\ c = 1;\quad c)\ a = -1,\ b = 0,\ c = -1, \tag{6}$$

то общее решение уравнения (5) мероморфно.

Исключая тривиальный случай (6a), в случаях (6b) и (6c) имеем уравнения

$$u'' + (\varepsilon w' - w^2 + \mu)u = 0,\quad \varepsilon^2 = 1, \tag{7}$$

Для того, чтобы общее решение уравнения (5) было рациональным, необходимо, чтобы для решения $u(z)$ точка $z = \infty$ была полюсом или точкой голоморфности. Справедлива

Теорема 2. *Если в уравнении (7) $\mu = 0$ и $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ – рациональное решение уравнения (1) при $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, где $Q_n = Q_n^{[N]}$ – полиномы Яблонского–Воробьева, то общее решение уравнения (7) имеет вид $u(z) = (C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2})/Q_{n-1}$ при $\varepsilon = 1$ и $u(z) = (C_1 Q_{n-1}(z) + C_2 Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$. при $\varepsilon = -1$.*

Заметим, что для второго уравнения Пенлеве (2) результаты работы частично получены в [3].

Литература

1. Громак В. И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. №8. С. 1017–1033.

2. Домрин А.В., Сулейманов Б.И., Шумкин М.А.. *О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий* // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. 2020. Т. 311. С. 106–122.

3. Громак Е.В. *О мероморфных решениях линейных уравнений второго порядка, связанных со вторым уравнением Пенлеве*// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2022. Т. 12. № 3. С. 42–49.

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Л.В. Детченя, Е.Е. Кулеш, В.М. Пецевич

Целью данной работы является поиск необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у решений системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x'^2 &= (\alpha_1 x + \alpha_2)(K_1 y^2 + xy + K_2),\\ y'^2 &= (y + \beta_1)(K_1 y^2 + xy + K_2), \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, α_i, β_j – аналитические функции переменной t, $K_1 \neq 0$, K_i – некоторые постоянные.

Запись $P \neq 0$ означает, что P не обращается в нуль в некоторой области D.

Система (1) является частным случаем системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (b_{41}y^4 + b_{31}y^3 + b_{21}y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00} \end{aligned} \tag{2}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где

$$|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0, |b_{41}| + |b_{31}| + |b_{21}| + |b_{11}| + |b_{01}| \neq 0.$$

Система (2), когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$ рассматривалась в [1]. Случай, когда $b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$, $b_{11} \neq 0$ рассматривался в [2]. Случай, когда $|b_{41}| + |b_{31}| \neq 0$ рассматривался в [3].

Система (1) является одной из 7 систем, которые являются необходимыми условиями наличия свойства Пенлеве у системы

$$\begin{aligned} x'^2 &= (a_{24}x^4 + a_{23}x^3 + a_{22}x^2 + a_{21}x + a_{20})\, y^2 + \\ &\quad + (a_{14}x^4 + a_{13}x^3 + a_{12}x^2 + a_{11}x + a_{10})\, y + a_{04}x^4 + a_{03}x^3 + a_{02}x^2 + a_{01}x + a_{00}, \\ y'^2 &= (y^2 + b_{11}y + b_{01})x + b_{40}y^4 + b_{30}y^3 + b_{20}y^2 + b_{10}y + b_{00} \end{aligned}$$

с аналитическими по t коэффициентами, где $|a_{24}| + |a_{23}| + |a_{22}| + |a_{21}| + |a_{20}| \neq 0$ [4]. (В [4] система (1) имеет обозначение (8)).

Одна из систем, полученных в [4] (в [4] имеет обозначение (11)), рассматривалась в [5].

Исключая из системы (1) компоненту x, относительно компоненты y построим дифференциальное уравнение. Используя метод малого параметра и некоторые леммы из [6], [7] получим дополнительные условия на коэффициенты системы (1).

Построив уравнение относительно компоненты x и используя метод резонансов, тест Пенлеве, метод сравнения полученных уравнений с уравнениями, аналитические свойства решений которых известны, покажем, что справедлива

Теорема. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *обладала свойством Пенлеве, необходимо, чтобы она дробно-линейным преобразованием* x, y *и аналитической заменой независимой переменной* t *приводилась к одному из видов:*

$$x'^2 = H_1(K_1y^2 + xy + K_2), \quad y'^2 = (y + H_3)(K_1y^2 + xy + K_2); \tag{3}$$

$$x'^2 = H_1(x + H_2)(K_1y^2 + xy + K_2), \quad y'^2 = (y + H_3)(K_1y^2 + xy + K_2),$$

где H_1, H_2, H_3, K_1, K_2 *– некоторые постоянные, и при этом* $H_1 \neq 0$, $K_1 \neq 0$.

Дифференциальная система (3) *обладает свойством Пенлеве.*

Литература

1. Ванькова, Т. Н. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка без подвижных критических особенностей* / Т. Н. Ванькова, Л. В. Детченя, В. М. Пецевич, А. О. Селивёрстова // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4(37). С. 62–65.

2. Белько, О. Н. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве* / О. Н. Белько, Т. Н. Ванькова, В. М. Пецевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 3. С. 42–49.

3. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве для системы дифференциальных уравнений второго порядка второй степени специального вида* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 30–35.

4. Детченя, Л. В. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка* / Л. В. Детченя, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящ. 100-летию со дня рождения проф. Ю.С. Богданова : материалы Междунар. математической конф., Минск, 1-4 июля 2021 г. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси. 2021. С. 59–60.

5. Ванькова, Т. Н. *Свойство Пенлеве для одной дифференциальной системы второго порядка* / Т. Н. Ванькова, Е. Е. Кулеш, В. М. Пецевич // Еругинские чтения – 2022. В 2 ч. Ч.1. XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая – 3 июня 2022 г. Новополоцк : Полоцкий гос. ун-т. 2022. С. 5–7.

6. Пецевич, В. М. *Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у системы двух дифференциальных уравнений второй степени* / В. М. Пецевич, В. А. Пронько // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 69–75.

7. Пецевич, В. М. *Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка* / В. М. Пецевич, Д. Н. Шевченя // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 1(26). С. 48–51.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е. Е. Кулеш, И. П. Мартынов, В. М. Пецевич

В работе [1] получены семь обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [2–5] исследованы три из них.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение со свойством Пенлеве

$$y^{(5)}+4yy^{(4)}+14y'y'''+6y^2y'''+10(y'')^2+36yy'y''+4y^3y''+12(y')^3+12y^2(y')^2=0.$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{gathered}(w_{xxxxx}+4ww_{xxxx}+14w_xw_{xxx}+6w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+36ww_xw_{xx}+\\ +4w^3w_{xx}+12w_x^3+12w^2w_x^2)_x=F,\end{gathered} \tag{1}$$

где $w=w(x,t)$, F содержит слагаемые меньшего веса с производными по x и по t с аналитическими коэффициентами от (x,t). Общий вид F можно посмотреть в работе [5]. Ставится задача исследовать уравнение (1) на наличие свойства Пенлеве [6] и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Резонансная структура уравнения (1) описывается наборами $(s,u_0;r_1,...,r_n)$:

$$(1,1;-1,1,2,4,5,6),(1,2;-1,-2,1,4,5,6),(1,3;-1,-2,-3,4,5,6).$$

Теорема 1. *Чтобы уравнение* (1) *имело свойство Пенлеве, необходимо, чтобы оно* *имело вид*

$$
\begin{gathered}
w_{xxxxxx}+4ww_{xxxxx}+18w_xw_{xxxx}+6w^2w_{xxxx}+34w_{xx}w_{xxx}+48ww_xw_{xxx}+\\
+4w^3w_{xxx}+36ww_{xx}^2+72w_x^2w_{xx}+36w^2w_xw_{xx}+24ww_x^3=Aw_{xxxxx}+Bw_{xxxxt}+\\
+4w(Aw_{xxxx}+Bw_{xxxt})+6w^2(Aw_{xxx}+Bw_{xxt})+14Aw_xw_{xxx}+10Bw_xw_{xxt}+\\
+4Bw_tw_{xxx}+10w_{xx}(Aw_{xx}+Bw_{xt})+12ww_x(3Aw_{xx}+2Bw_{xt})+12ww_tw_{xx}+\\
+4w^3(Aw_x+Bw_{xt})+12(w_x^2+w^2w_x)(Aw_x+Bw_t)+Cw_{xxxx}+Gw_{xxxt}+\\
+2w((2C+E)w_{xxx}+2Gw_{xxt})+2(5C+2E)w_xw_{xx}+6Gw_xw_{xt}+4Gw_tw_{xx}+\\
+6w^2((C+E)w_{xx}+Gw_{xt})+4(w^3+3ww_x)((C+E)w_x+Gw_t)+Kw_{xxx}+\\
+BEw_{xxt}+2w(AE-3E_x+2K+2L)w_{xx}+2BEww_{xt}+2BEw_xw_t+\\
+(2AE-6E_x+3K+3L)w_x^2+6(K+L)w^2w_x+(K+L)w^4+\\
+(A(AE+L-E_x)-3(AE+L-2E_x)_x+BE_t+E(C+E))w_{xx}+\\
+(B(AE+L-2E_x)+EG)w_{xt}+2(2AE_x+BE_t+E(C+E)-3E_{xx})ww_x+\\
+2(BE_x+EG)ww_t+(2A(AE+L-2E_x)_x+B(AE+L-2E_x)_t+\\
+(C+E)(AE+L-2E_x)-3(AE+L-2E_x)_{xx}+2E_{xxx}-AE_{xx}+GE_t+\\
+E(K+L))w_x+(G(AE+L-3E_x)+B(AE+L-3E_x)_x)w_t+(AE_{xx}+\\
+BE_{xt}+E_x(C+E)+GE_t+E(K+L)-E_{xxx})w^2+(A(AE+L-3E_x)_{xx}+\\
+B(AE+L-3E_x)_{xt}+(C+E)(AE+L-3E_x)_x+G(AE+L-3E_x)_t+\\
+(K+L)(AE+L-3E_x)-(AE+L-3E_x)_{xxx})w+M,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где A,B,C,E,G,K,L,M *— аналитические функции от* (x,t).

Теорема 2. *Уравнение (2) заменой*

$$u=w_{xxx}+4ww_{xx}+3w_x^2+6w^2w_x+w^4+E(w_x+w^2)+(AE+L-3E_x)w$$

сводится к линейному уравнению

$$u_{xxx}=Au_{xx}+Bu_{xt}+(C+E)u_x+Gu_t+(K+L)u+M.$$

Теорема 3. *Если функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\varphi_{xxxx}+E\varphi_{xx}+(AE+L-3E_x)\varphi_x=0,$$

то функция $w(x,t)=\dfrac{\varphi_x}{\varphi}$ *является решением уравнения (2) при* $M=0$.

Следствие 1. *При* $E=L=M=0$ *уравнение (2) имеет решение*

$$w(x,t)=\frac{3a(t)x^2+2b(t)x+c(t)}{a(t)x^3+b(t)x^2+c(t)x+d(t)}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi=\varphi(x,t)$, $\varphi_x=1$, $h=h(t)$. *Если* $E=L=M=0$, *то:*

1) функция $w=\dfrac{2\varphi}{\varphi^2-h}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=2$, $r=-2$;

2) функция $w=\dfrac{3\varphi^2-h}{\varphi(\varphi^2-h)}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=3$, $r=-2$;

3) функция $w=\dfrac{3\varphi^2}{\varphi^3-h}$ *является решением уравнения (2), отвечающим* $u_0=3$, $r=-3$.

Литература

1. Exton, H. *On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points* // Rendiconti di Matematica. 1971. Vol. 4, №3. P. 385–628.

2. Кулеш, Е.Е., *Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Весці НАН Беларусі. Сер. Фізіка-матэматычных навук. 2018. №1. С. 7–19.

3. Кулеш, Е.Е., *О свойствах решений одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. 2018. Т. 8. №2. С. 19–25.

4. Кулеш, Е.Е. *О свойстве Пенлеве для одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш // Еругинские чтения - 2019. XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям : материалы конференции, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси. ; редкол.: А.К. Деменчук, С.Г. Красовский, Е.К. Макаров. Минск. 2019. Ч. 1. С. 9–10.

5. Кулеш, Е.Е. *О свойстве Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов, В.М. Пецевич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2021) : труды 10-го международного научного семинара АМАДЕ-2021, 13–17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь, БГУ. Минск : ИВЦ Минфина. 2022. С. 35-42.

6. Кулеш, Е.Е., *О свойствах решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными* / Е.Е. Кулеш, И.П. Мартынов // Труды института математики НАН Беларуси. 2006. Т.14. №1. С. 94–99.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

И.П. Мартынов, В.А. Пронько, А.А. Кумко

Рассмотрим уравнение

$$y^{IV} = \beta\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + ayy'' + by'^2 + cy^3, \tag{1}$$

где y – комплексная функция от z, z – независимая комплексная переменная, коэффициенты β, a, b, c – комплексные постоянные, $\beta \neq 0$. Решение упрощенного уравнения для (1), инвариантного при замене переменных $(z, y) \to (\varepsilon z, y)$, имеет вид

$$y = C_1(z - z_0)^{2+\frac{1}{1-\beta}} + C_2 z + C_3,$$

при $\beta \notin \left\{1, 2, \dfrac{3}{2}\right\}$, где z_0, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Если $\beta = 1$, то $y = C_2 + C_3 z + C_4 e^{C_1 z}$.

При $\beta = 2$ и $\beta = \dfrac{3}{2}$ общее решение уравнения (1) содержит подвижные логарифмические точки ветвления. Справедлива

Лемма 1. *Для однозначности решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta = 1$ *или* $\beta = 1 - \dfrac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, -2, 0\}$.

Рассмотрим уравнение (1) вида

$$y^{IV} = \beta\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + (m + 12)yy'' + 12y'^2 - 6my^3, \tag{2}$$

где m - постоянная.

Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$y = \frac{\alpha}{(z-z_0)^2} + \ldots + h(z-z_0)^{r-2} + \ldots,$$

где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Резонансное уравнение для (2) имеет вид

$$(r+1)(r^3-(15-8\beta)r^2-((2m+12)\alpha+80\beta-106)r+12((m+10-8\beta)\alpha+24\beta-30)=0. \quad (3)$$

Согласно [1, 2] для однозначности решений уравнения (2) резонансы должны быть целыми и различными. Справедлива

Теорема 1. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений уравнения* (1) *необходимо, чтобы* $\beta \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right\}$.

Пусть $\beta = \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Уравнение (3) запишется в виде

$$(r+1)(r-6)\left(r^2 - 5r + 12 - \frac{144}{m}\right) = 0.$$

Получим следующие наборы вида $(m; r_1, r_2, r_3, r_4)$:

$$(3; -1, -4, 6, 9), (4; -1, -3, 6, 8), (12; -1, 0, 5, 6), (18; -1, 1, 4, 6), (24; -1, 2, 3, 6)$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + 15yy'' + 12y'^2 - 18y^3, \quad (4)$$

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + 16yy'' + 12y'^2 - 24y^3, \quad (5)$$

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + 24yy'' + 12y'^2 - 72y^3, \quad (6)$$

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + 30yy'' + 12y'^2 - 108y^3, \quad (7)$$

$$y^{IV} = \frac{1}{2}\frac{(y''' - 12yy')^2}{y'' - 6y^2} + 36yy'' + 12y'^2 - 144y^3. \quad (8)$$

Справедлива

Теорема 2. *Для наличия свойства Пенлеве у уравнения* (2) *при* $\beta = \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *необходимо, чтобы оно имело один из видов* $(4) - (8)$.

Для установления достаточности полученных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (2), положим

$$y'' - 6y^2 = x, x' = xw. \quad (9)$$

Для функции w получим уравнение

$$w^{IV} = (2\beta - 1)ww''' + 6\left(\beta - 1 + \frac{2}{m}\right)w'w'' - 2(\beta - 1)\left(1 + \frac{6}{m}\right)w^2w'' -$$

$$-2\left(\beta\left(1+\frac{12}{m}\right)-1-\frac{9}{m}\right)ww'^2+\frac{24}{m}(\beta-1)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)w^3w'-\frac{6}{m}(\beta-1)^2w^5. \qquad (10)$$

С учётом (10), замены $x'=xw$ и леммы из [3] имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы уравнение* (2) *имело свойство Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладало уравнение* (10) *и полярные разложения его решений имели целые вычеты.*

Литература

1. Мартынов И. П. *О дифференциальных уравнениях с неподвижными критическими особыми точками.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780–1791.

2. Ванькова Т. Н. *О некоторых аналитических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений.* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. 2008. № 1(16). С. 8–16.

3. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка с неподвижными критическими точками.* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 11. С. 2082–2086.

НЕКОТОРЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y'''=a_1\frac{y'y''}{y}+a_2\frac{(y')^3}{y^2}+a_3yy''+a_4(y')^2+a_5y^2y'+a_6y^4, \quad a_3a_4a_5a_6\neq 0, \qquad (1)$$

где a_i, $i=\overline{1,6}$—постоянные коэффициенты.

Упрощенным уравнением к уравнению (1) является уравнение $y'''=a_1\dfrac{y'y''}{y}+a_2\dfrac{y'^3}{y^2}$, которое имеет характеристический многочлен $\varphi(\lambda)=2\lambda^2+(a_1+1)\lambda-a_2$.

Отсюда согласно [1] имеем, что $a_1+1=-2(\lambda_1+\lambda_2)$, $a_2=-2\lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 — корни характеристического многочлена.

Предположим, что уравнение (1), имеет первый интеграл веса $p_1=2k$ вида

$$y^{2k-12}y''^4+\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{2n+1}A_{n,m}y^{2k+2m-n-14}y'^{2n+1-m}y''^{4-n}=K, \qquad (2)$$

где $A_{n,m}$ — произвольные постоянные, K — произвольная постоянная интегрирования.

Пусть корни характеристического уравнения $\varphi(\lambda)$ будут

$$\lambda_1=\frac{p+k-8}{4},\ \lambda_2=-\frac{3p-k+8}{4}. \qquad (3)$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения (1) при которых оно имеет первый интеграл вида (2). Для этого продифференцируем (2) с учетом (1). Получим

$$\begin{gathered}4a_1+2k-12+2A_{1,1}=0, \quad 4a_3+A_{1,2}=0,\\ (4-n)(a_2A_{n,m}+a_4A_{n,m-1}+a_5A_{n,m-2})+(3-n)a_3A_{n+1,m-1}+ \\ +((3-n)a_1+2k-15-n+2m)A_{n+1,m}+(2n-m+5)A_{n+2,m}=0,\end{gathered} \qquad (4)$$

где $n = \overline{0,3}$, $m = \overline{1, 2n+4}$,

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 0,\ j = 1, \\ 0, & \text{если } i = 0, j \neq 1; \text{или } j \leq 0; \text{или } i > 4; \text{или } j > 2i+1 \end{cases}$$

Найдем случаи когда условия (4) совместны и в результате выделим все классы уравнений (1), которые имеют первые интегралы вида (2) при условии (3), то есть

$$a_1 = 7 - k + p,\ a_2 = \frac{1}{8}(p + k - 8)(3p - k + 8). \tag{5}$$

В частности, если положить

$$\begin{gathered} p = \frac{(4c+1)k}{4},\ a_4 = \frac{1}{128c} a_3 (k(144c^2 + 136c + 9) - 256c), \\ a_5 = \frac{1}{128c^2} a_3^2 (4c+1)(36c+17),\ a_6 = \frac{3}{128kc^3} a_3^3 (4c+1)^2, \end{gathered} \tag{6}$$

где c — произвольная постоянная, то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} & y''' = (7 + \frac{1}{4}k(4c-3))\tfrac{y'y''}{y} + \tfrac{1}{128}(k(12c-1)+32)(k(4c+5)-32)\tfrac{y'^3}{y^2} + a_3 y y'' + \\ & + \frac{1}{128c} a_3 (k(144c^2+136c+9) - 256c) y'^2 + \frac{1}{128c^2} a_3^2 (4c+1)(36c+17) y^2 y' + \\ & + \frac{3}{128kc^3} a_3^3 (4c+1)^2 y^4, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{65536k^4c^8} y^{2k-16} \Bigg(k^4c^8 \big(16yy'' + (k(4c+5)-32)y'^2\big)\big(16yy'' - (k(12c-1)+32)y'^2\big)^3 - \\ & -8a_3k^4c^7\big(128cyy'' + (k(48c^2+56c+3)-256c)y'^2\big)\big(16yy'' - (k(12c-1)+32)y'^2\big)^2 y^2y' - \\ & -4a_3^2k^3c^6\big(16yy'' - (k(12c-1)+32)y'^2\big)\big(512(4c+1)y^2y''^2 - 16(k(336c^2-88c-19) + \\ & +128(4c+1))yy'^2y'' - (k^2(4032c^3+4368c^2+436c-5) - 32k(336c^2-88c-19) - \\ & -2048(4c+1))y'^4\big)y^4 + 8a_3^3k^3c^5\big(768(4c+1)(12c-1)y^2y''^2 + \\ & +64(k(720c^2+168c+5) - 48(4c+1)(12c-1))yy'^2y'' - \\ & -(k^2(48384c^4+48384c^3+6624c^2-176c-19) + 128k(720c^2+168c+5) - \\ & -3072(4c+1)(12c-1))y'^4\big)y^6y' + 2a_3^4k^2c^4\big(2304(4c+1)^2y^2y''^2 + \\ & +384(4c+1)(k(60c+7) - 24(4c+1))yy'^2y'' - (k^2(241920c^4+241920c^3 + \\ & +56160c^2+2960c-63) + 768k(4c+1)(60c+7) - 9216(4c+1)^2)y'^4\big)y^8 + \\ & +8a_3^5k^2c^3(4c+1)\big(288(4c+1)yy'' - (k(12096c^3+9072c^2+1404c+37) + \\ & +576(4c+1))y'^2\big)y^{10}y' - 4a_3^6k^2c^2(4c+1)^2\big(336c^2+168c+13\big)y^{12}y'^2 - \\ & -216a_3^7kc(4c+1)^4y^{14}y' - 27a_3^8(4c+1)^4y^{16} \Bigg) = K. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, верна

Теорема. *Если для уравнения (1) выполнены соотношения (5) и имеют место условия (6), то уравнение (7) имеет первый интеграл вида (8).*

Литература

1. Можджер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью* : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Гродно, 2006.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Мухин, И.П. Мартынов, В. А. Пронько

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + by(y')^2y'' + c(y')^4 + ly(y')^3,$$

где $a, b, c, l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$, $y = y(z)$.

Масштабным преобразованием аргумента сделаем $l = 2$. Будем иметь

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + by(y')^2y'' + c(y')^4 + 2y(y')^3. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) не имеет полярных решений. В этом случае необходимо выполнение условий

$$a + b + c = 1, \ 2a + b = 3. \quad (2)$$

Учитывая (2), перепишем уравнение (1):

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + (3 - 2a)y(y')^2y'' + (a - 2)(y')^4 + 2y(y')^3. \quad (3)$$

Легко проверить, что если $a \neq \frac{3}{2}$, то уравнение (3) имеет двухпараметрическое решение

$$y = Ce^{\frac{2a-3}{z-z_0}}, \forall z_0, C. \quad (4)$$

Лемма 1. *Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет решение с подвижной существенно особой точкой.*

Лемма 2. *Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл*

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2}\right)^2 + \frac{4}{2a-3}\left(\frac{y'}{y}\right)^3 = h\left(\frac{y'}{y}\right)^{2a}, \ \forall h \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Замечание 1. Функция (4) удовлетворяет уравнению (5) при $h = 0$.

Замечание 2. При $a = 2$ уравнение (3) имеет общее решение

$$y = C\left(1 + \frac{C_2 - C_1}{z - C_2}\right)^{\frac{1}{C_2 - C_1}}, \ \forall C, C_1, C_2, C_1 \neq C_2.$$

Пусть $a = \frac{3}{2}$. Верна

Лемма 3. *Уравнение (3) при $a = \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл*

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2}\right)^2 = 4\left(\frac{y'}{y}\right)^3\left(ln\left(\frac{y'}{y}\right) + H\right), \ \forall H \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Полагая $y' = wy$, при $a = \frac{3}{2}$ из (3) получим

$$ww'' = \frac{3}{2}(w')^2 + 2w^3. \tag{7}$$

Используя (6), найдем, что уравнение (7) будет иметь первый интеграл $(w')^2 = 4w^3(lnw + H)$.

Согласно [1, с. 47], уравнение (7) можно назвать барьерным, так как с одной стороны уравнение (7) должно иметь решение с полюсом второго порядка $w = \beta(z - z_0)^{-2}$, однако эта функция уравнению (7) не удовлетворяет. Как и в работе [1, с. 47], к уравнению (7) применим преобразование

$$z - z_0 = e^{\frac{x}{\gamma}},\ w = \gamma^2 e^{-\frac{2x}{\gamma}} u,\ u = u(x). \tag{8}$$

При этом получим

$$w' = \gamma^2 e^{-\frac{3x}{\gamma}}(\gamma\dot{u} - 2u), w'' = \gamma^2 e^{-\frac{4x}{\gamma}}(\gamma^2\ddot{u} - 5\gamma\dot{u} + 6u), \tag{9}$$

где $\dot{u} = \frac{du}{dx},\ \ddot{u} = \frac{d^2u}{dx^2}$.

С учетом (9) из (7) получим

$$\gamma\left(u\ddot{u} - \frac{3}{2}(\dot{u})^2\right) + u\dot{u} = 2\gamma u^3. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) согласно [1, с. 48] будем искать в виде ряда $u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \gamma^k$.

Тогда, из (10) получим, что $\dot{u}_1 = 2$. Значит, будем иметь $u_1 = 2x$. Так как $x = \gamma ln(z - z_0)$, то получим, что функция $u = u(z)$ будет иметь подвижные логарифмические точки ветвления.

Значит, верна

Теорема 1. *Решения уравнения (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеют подвижные существенно особые точки, а при $a = \frac{3}{2}$ имеют подвижные логарифмические точки ветвления.*

Литература

1. Соболевский С. Л. *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений* / С. Л. Соболевский. Минск: БГУ. 2006.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л.А. Хвощинская

Рассматривается следующая задача. Найти систему двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, которая при обходе вокруг особых точек a_k, $k = 1, ..., n+1$, $a_{n+1} = \infty$ умножается на постоянные невырожденные 2×2 матрицы V_k, $k = 1, ..., n+1$, $V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_{n+1} = E$ (см.[1]). Наша цель – построить дифференциальное уравнение класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$

где U_k – постоянные 2×2 матрицы (матрицы-вычеты), причем $U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,\ldots,n$. При построении применялся «метод логарифмизации» произведения матриц второго порядка [2].

Обозначим характеристические числа матриц V_k – α_k, β_k, матриц $V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k$ – α_k^*, β_k^*, матриц $V_k\cdot V_{k+1}\cdot\ldots\cdot V_n$ – α_k^{**}, β_k^{**}, соответственно, и найдем числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $\rho_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k^*$, $\sigma_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k^*$, $\rho_k^{**} = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k^{**}$, $\sigma_k^{**} = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k^{**}$, $\sum_{k=1}^{n+1}(\rho_k+\sigma_k) = 1$, $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(\sigma_{\mathrm{n+1}}-\rho_{\mathrm{n+1}}) < 1$, $(\rho_k^*+\sigma_k^*) = \sum_{m=1}^{k}(\rho_m+\sigma_m)$, $(\rho_k^{**}+\sigma_k^{**}) = \sum_{m=k}^{n}(\rho_m+\sigma_m)$, $d_k^* = \rho_k^*\sigma_k^*$, $d_k^{**} = \rho_k^{**}\sigma_k^{**}$. Установлено, что матрица $U_1+U_2+\ldots+U_n$ подобна матрице $S = \left(\begin{smallmatrix} -\rho_{n+1} & 0 \\ 0 & 1-\sigma_{n+1}\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{smallmatrix}\right)$. В работе [2] доказано, что в случае $n=2$ матрица S представима в виде суммы матриц

$$S = \begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix} = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & \gamma_1/c\\ c & s_1'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -\gamma_1/c\\ -c & s_2'\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $s_1 = \frac{\rho_1\sigma_1-(\rho-\rho_2)(\rho-\sigma_2)}{\sigma-\rho}$, $s_1' = \frac{(\sigma-\rho_2)(\sigma-\sigma_2)-\rho_1\sigma_1}{\sigma-\rho}$, $s_2 = \frac{\rho_2\sigma_2-(\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)}{\sigma-\rho}$, $s_2' = \frac{(\sigma-\rho_1)(\sigma-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma-\rho}$, $\gamma_1 = -(s_1-\rho_1)(s_1-\sigma_1)$, c – произвольная постоянная. Так как матрицы $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}V_k$, $k=1,2$, то они представляют собой матрицы-вычеты уравнения (1) при $n=2$.

В случае произвольного n представляем матрицу S в виде суммы n матриц $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$, где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}V_k$, $k=1,\ldots,n$. Для этого записываем матрицу V_{n+1}^{-1} $(n-2)$ способами в виде произведений двух матриц $V_{n+1}^{-1} = (V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k)\cdot(V_{k+1}\cdot\ldots\cdot V_n)$, $k=1,\ldots,n-2$, к каждому из которых применяем формулу (2). В результате получаем систему $(n-2)$ представлений матрицы S:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = S_1^* + S_2^{**} = S_2^* + S_3^{**} = \ldots = S_k^* + S_{k+1}^{**} = \ldots = S_{n-1}^* + S_n^{**}, \tag{3}$$

где матрицы $S_k^* \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k)$, $S_k^{**} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_k\cdot\ldots\cdot V_n)$ и содержат n различных произвольных постоянных c_k. Из системы (3) последовательно находим матрицы $S_1 = S_1^*$, $S_k = S_k^* - S_{k-1}^* = S_k^{**} - S_{k+1}^{**}$, $k=2,\ldots,n-1$, $S_n = S_n^{**}$. Связь между постоянными c_k и c_{k+1} устанавливаем на основании формулы $\det S_k = d_k$, $k=1,\ldots,n-1$. Таким образом была доказана теорема.

Теорема. *Решение проблемы Римана для двух функций $Y(z) = (y_1,y_2)$ с $(n+1)$ особыми точками a_1, $a_2,\ldots a_n$, $a_{n+1} = \infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса* $\frac{dY}{dz} = Y\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{S_k}{z-a_k}$, *элементы матриц-вычетов* $S_k = \left(\begin{smallmatrix} s_k & \gamma_k/c_k\\ c_k & s_k'\end{smallmatrix}\right)$ *которых находятся по формулам* $s_k = \frac{1}{\sigma-\rho}\left[d_k^* - d_{k-1}^* - \rho(\rho_k+\sigma_k) + d_k^{**} - d_{k+1}^{**}\right]$, $s_k' = \frac{1}{\sigma-\rho}\left[d_{k-1}^* - d_k^* + \sigma(\rho_k+\sigma_k) + d_{k+1}^{**} - d_k^{**}\right]$, $c_k = c\tau_1\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_{n-3}(\tau_{n-2}-1)$, $\gamma_k = -(s_k-\rho_k)(s_k-\sigma_k)$, $\tau_k^2\gamma_k^* + \tau_k\left(\gamma_{k+1}^* + \gamma_k^* - \gamma_k\right) + \gamma_{k+1}^* = 0$, $k=1,\ldots,n-2$, c *– произвольная постоянная.*

Литература

1. Еругин Н. П. *Проблема Римана.* Минск: Наука и техника, 1982.

2. Khvoshchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.В. Цегельник

Решения системы дифференциальных уравнений

$$y = -w + \varphi(t) + \frac{[w' + (b-1)\varphi'(t)]^2}{2w^2}, \tag{1.1}$$

$$w = -y + \varphi(t) + \frac{[y' + b\varphi'(t)]^2}{2y^2} \tag{1.2}$$

с неизвестными функциями y, w независимой переменной t, произвольной аналитической функцией $\varphi(t)$ и параметром b подчинены одному из условий:
либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y + [y' - b\varphi'(t)]w = 0, \tag{2}$$

либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y - [y' - b\varphi'(t)]w = 0. \tag{3}$$

При выполнении условия (2) система (1) эквивалентна по y $(y' - b\varphi'(t) \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2\varphi y^2 + 2b\varphi'' y - b^2\varphi'^2, \tag{4}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi'(t) \neq 0)$ — уравнению

$$2ww'' = w'^2 + 4w^3 - 2\varphi w^2 - 2(b-1)\varphi'' w - (b-1)^2\varphi'^2. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть $y_b = y(b,t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (4) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция w, определяемая (1.2), является решением уравнения (5).*

Легко видеть, что уравнение (4) получается из (5) заменой $w \to y$, $b \to 1-b$.

Теорема 2. *Пусть $w_{b-1} = w(b-1,t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (5) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция y, определяемая (1.1), является решением уравнения (4).*

При выполнении условия (3) система (1) эквивалентна по y $(y' - b\varphi' \neq 0)$ уравнению

$$2yy'' = 3y'^2 - 4b\varphi' y' + 2\varphi y^2 + 2by\varphi'' + b^2\varphi'^2, \tag{6}$$

а по w $(w' + (b-1)\varphi' \neq 0)$ — уравнению

$$2ww'' = 3w'^2 + 4(b-1)\varphi' w' + 2\varphi w^2 - 2(b-1)w\varphi'' + (b-1)^2\varphi'^2. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть $y_b = y(b,t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (6) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция w, определяемая (1.2), является решением уравнения (7).*

Теорема 4. *Пусть $w_{b-1} = w(b-1,t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (7) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция y, определяемая (1.1), является решением уравнения (6).*

Уравнение (6) получается из (7) заменой $w \to y$, $b \to 1-b$.

Пусть $\varphi(t) = c$ — const. Тогда уравнения (4), (6) принимают соответственно вид

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2cy^2, \tag{8}$$

$$2yy'' = 3y'^2 + 2cy^2. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет первый интеграл

$$y'^2 - 2y^3 + 2cy^2 = Hy, \tag{10}$$

где H — произвольная постоянная. Уравнение (10) интегрируется в эллиптических функциях [1].

Уравнение (9) заменой

$$y = p^{-2}(t) \tag{11}$$

сводится к линейному $p'' = -\frac{c}{2}p$.

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Уравнения* (4), (6) *при* $\varphi(t) = c$ *— const являются уравнениями Пенлеве–типа.*

Отметим, что уравнение (4) при $\varphi(t) = t$ есть уравнение XXXIV из списка [2].

Теорема 6. *Уравнение* (6) *при* $b = 0$ *либо при* $\varphi(t) = t$ *является уравнением Пенлеве–типа.*

Доказательство. Если в (6) $b = 0$, то преобразованием (11) оно сводится к уравнению Эйри $p'' = -\frac{\varphi}{2}p$. При $\varphi(t) = t$ уравнение (6) принимает вид

$$2yy'' = 3y'^2 - 4by' + 2ty^2 + b^2. \tag{12}$$

Пусть $b \neq 0$. Заменой $y \to by^{-1}$ от уравнения (12) перейдем к уравнению

$$2yy'' = y'^2 - 4y^2y' - y^4 - 2ty^2. \tag{13}$$

Наряду с (13) рассмотрим более общее уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(t)v^2 - \gamma, \tag{14}$$

в котором $F(t)$ — произвольная аналитическая функция; γ — параметр. Уравнение (13) с точностью до обозначения совпадает с (14) при $F(t) = -t$, $\gamma = 0$.

Используя подход в [2], в [3] показано, что уравнение (14) является уравнением Пенлеве–типа. А именно, общее решение уравнения (14) есть рациональная функция постоянных интегрирования. Теорема доказана.

Замечание. Уравнение (14) в случае $\gamma = 1$ есть XXVII каноническое уравнение в списке [2]. Преобразование Беклунда для уравнения (14) в случае $F(t) = 2(t^2 + \alpha)$, $\gamma = -2\beta$ (α, β — произвольные параметры) получено в [4].

Следствие. Уравнение (4) при $\varphi''(t) \not\equiv 0$, а уравнение (6) при $b \neq 0$, $\varphi''(t) \not\equiv 0$ не являются уравнениями Пенлеве–типа.

Литература

1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М: Наука, 1971.

2. Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ОНТИ, 1939.

3. Цегельник В. В. *О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве.* // Теоретическая и математическая физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 361–367.

4. Цегельник В. В. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа.* Минск: Издательский центр БГУ, 2007.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КЛАССА ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.А. Барабанов, Е.Б. Бекряева

Для натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ которых кусочно-непрерывны и ограничены на временно́й полуоси $t \geqslant 0$.

Эффективность понятия экспоненциальной дихотомии в исследовании асимптотики решений нелинейных дифференциальных систем, первое приближение которых экспоненциально дихотомично, и в его приложениях к динамическим системам послужило причиной многообразных обобщений этого понятия как внутри самой теории линейных дифференциальных систем, так и за её пределами – в теории эволюционных операторов и в теории линейных расширений динамических систем. Два таких обобщения рассмотрены в работе [1], в которой введены классы слабо экспоненциально дихотомических и почти экспоненциально дихотомических систем – эти классы задаются следующими двумя определениями.

Определение 1. Систему из $\mathcal{M}_n$ назовём *слабо экспоненциально дихотомической на полуоси*, если существуют такие положительные постоянные ν_1 и ν_2 и такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причём, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для её решений $x(\cdot)$ выполнены два условия:

$1'$) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1(x)e^{-\nu_1(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$,

$2'$) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2(x)e^{\nu_2(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в их обозначении).

Определение 2. Систему из $\mathcal{M}_n$ назовём *почти экспоненциально дихотомической на полуоси*, если существуют такие положительные постоянные c_1, c_2 и ν_1, ν_2 и такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причём, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для её решений $x(\cdot)$ выполнены два условия:

$1''$) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1 e^{-\nu_1(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant t_x$,

$2''$) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2 e^{\nu_2(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant t_x$,

где t_x – неотрицательное число, зависящее, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в обозначении).

Если в определении 1 величины $c_1(x)$ и $c_2(x)$ считать одними и теми же для всех решений с начальными данными из пространств L_- и L_+ соответственно, т.е. $c_1(x) = c_1 = \mathrm{const}$ и $c_2(x) = c_2 = \mathrm{const}$, то придём к определению класса $\mathcal{E}_n$ экспоненциально дихотомических на полуоси n-мерных систем. Таким образом, определение слабо экспоненциально дихотомических систем отличается от определения экспоненциально дихотомических систем только отказом от требования равномерности оценок по соответствующим постоянным-множителям.

Точно так же, если в определении 2 величины t_x считать равными нулю для всех решений из соответствующих подпространств, то, опять же, получим определение класса $\mathcal{E}_n$ экспоненциально дихотомических на полуоси n-мерных систем. Хотя условия $1''$) и $2''$) и означают равномерность оценок по постоянным-множителям c_1 и c_2, но не при всех $t \geqslant 0$ (как в случае экспоненциально дихотомических систем), а только при t, больших некоторого t_x, своего для каждого решения $x(\cdot)$.

Класс n-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим через $W\mathcal{E}_n$, класс n-мерных почти экспоненциально дихотомических систем – через $A\mathcal{E}_n$.

Очевидны равенства $\mathcal{E}_1 = A\mathcal{E}_1 = W\mathcal{E}_1$. В работе [1] доказано, что для каждого $n \geqslant 2$ имеют место собственные включения $\mathcal{E}_n \subset A\mathcal{E}_n \subset W\mathcal{E}_n$. Кроме того, в работе [1] получена следующая характеризация класса $W\mathcal{E}_n$: система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $W\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что

$$\sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0 \quad \text{и} \quad \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0. \qquad (1)$$

Для сравнения приведём аналогичную характеризацию класса $\mathcal{E}_n$. Как вытекает из [2, с. 236, лемма 3.1], справедливо следующее утверждение: система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что

$$\varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0 \quad \text{и} \quad \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0. \qquad (2)$$

Сопоставляя между собой условия (1) и (2), видим, что определения классов $W\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ отличаются друг от друга только порядком выполнения соответствующих предельных операций. Отметим, что, как следует из [3], в (1), в отличие от (2), нельзя заменить $\sup$ и $\inf$ на $\max$ и $\min$ соответственно.

Соотношения (1) и (2) дают определения классов $W\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ на языке соответствующих числовых характеристик. Аналогичную характеризацию класса $A\mathcal{E}_n$ даёт следующая

Теорема. *Система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $A\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to+\infty} \sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \lim_{\delta\to+\infty} \sup_{\tau\geqslant\delta} \sup_{t-\tau\geqslant T} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0, \\ &\lim_{T\to+\infty} \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \lim_{\delta\to+\infty} \inf_{\tau\geqslant\delta} \inf_{t-\tau\geqslant T} \frac{1}{t-\tau} \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Чтобы сравнить условия (3) с условиями (1) и (2), достаточно заметить, что имеют место [4, с. 223] равенства $\varlimsup\limits_{t-\tau\to+\infty} = \lim\limits_{T\to+\infty} \sup\limits_{t-\tau\geqslant T}$ и $\varliminf\limits_{t-\tau\to+\infty} = \lim\limits_{T\to+\infty} \inf\limits_{t-\tau\geqslant T}$. Отметим, что участвующие в каждом из неравенств (3) две последовательные предельные операции с δ (их аналогично сказанному выше можно, согласно [4, с. 223], заменить одной операцией $\overline{\lim\limits_{\tau\to+\infty}}$ в первом неравенстве и $\underline{\lim\limits_{\tau\to+\infty}}$ во втором) опустить нельзя, поскольку, если их опустить, то тогда, переставляя местами два последовательных $\sup$ в первом неравенстве и два последовательных $\inf$ во втором (что всегда можно сделать, не изменяя содержание выражения), придём к неравенствам (2), но это противоречит тому, что включение $\mathcal{E}_n \subset A\mathcal{E}_n$ собственное.

Литература

1. Барабанов Е. А., Бекряева Е. Б. *О двух не предполагающих равномерности оценок норм решений обобщениях класса экспоненциально дихотомических на временно́й полуоси линейных дифференциальных систем. I* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 16–30.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

4. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

СИМВОЛ ПОЛНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КАК ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРА

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, с которой мы далее отождествляем саму систему (1). Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $\sigma_{\text{л}}(A)$ обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 38; 2, с. 19], т.е. величину, определяемую равенством $\sigma_{\text{л}}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) - \underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\ t^{-1}\int_0^t \operatorname{Tr}A(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, где $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ – показатели Ляпунова системы (1), а Tr – след матрицы. Следуя [3], назовём *символом полной экспоненциальной неустойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$ величину

$$\operatorname{ti}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1(A) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1(A) < 0. \end{cases}$$

Содержательный смысл функции $\operatorname{ti}\colon \mathcal{M}_n \to \{0, 1\}$ очевиден: она является характеристической функцией множества тех систем из $\mathcal{M}_n$, у линейного пространства решений которых нет подпространств ненулевой размерности, решения которых стремятся к нулю на бесконечности экспоненциально.

Коэффициент неправильности Ляпунова неотрицателен и обращается в нуль только на правильных по Ляпунову системах [1, с. 349] (класс правильных систем (1) обозначим через $\mathcal{R}_n$). С помощью коэффициента $\sigma_{\text{л}}(A)$ формулируются, в частности, достаточные условия, характеризующие реакцию системы $A \in \mathcal{M}_n$ как на её линейные экспоненциально убывающие возмущения [4], так и на её нелинейные возмущения высшего порядка малости [2, с. 275].

Для заданного метрического пространства M рассмотрим параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M, \tag{2}$$

для которого при каждом фиксированном $\mu \in M$ система (2) принадлежит классу $\mathcal{M}_n$; обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова и символ полной экспоненциальной неустойчивости через $\sigma_{\text{л}}(\mu;\mathcal{A})$ и $\mathrm{ti}(\mu;\mathcal{A})$. В частности, определены функции $\sigma_{\text{л}}(\cdot\,;\mathcal{A})\colon M \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{ti}(\cdot\,;\mathcal{A})\colon M \to \{0,1\}$, которые назовём соответственно *коэффициентом неправильности Ляпунова* и *символом полной экспоненциальной неустойчивости* семейства (2).

Считаем, что зависимость семейства (2) от параметра μ такова, что сходимость последовательности $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ к точке μ_0 влечёт за собой равномерную на временно́й полуоси сходимость матричнозначной последовательности $\bigl(\mathcal{A}(t,\mu_k)\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ к матрице $\mathcal{A}(t,\mu_0)$. Класс таких семейств (2) обозначим через $\mathcal{U}^n(M)$. Равносильным образом его можно было бы определить так. Введём на пространстве систем $\mathcal{M}_n$ метрику $\mathrm{dist}_{\mathrm{u}}$ равномерной сходимости на временно́й полуоси: $\mathrm{dist}_{\mathrm{u}}(A,B) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|A(t)-B(t)\|$ для всех $A,B \in \mathcal{M}_n$. Тогда класс $\mathcal{U}^n(M)$ состоит из всех непрерывных отображений метрического пространства M в метрическое пространство $(\mathcal{M}_n, \mathrm{dist}_{\mathrm{u}})$.

Введём также подкласс $\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$ класса $\mathcal{U}^n(M)$, состоящий из семейств, задаваемых функциями вида $\mathcal{A}(t,\mu) = B(t)+Q(t,\mu)$, где $B \in \mathcal{R}_n$, а непрерывная функция $Q\colon \mathbb{R}_+ \times \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu\in M} \|Q(t,\mu)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Другими словами класс $\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$ можно было бы определить как класс правильных линейных систем (1) с равномерно убывающими к нулю на бесконечности параметрическими возмущениями их матриц коэффициентов. Далее мы отождествляем семейство (2) и задающую его матричнозначную функцию $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)$ или $\mathcal{A} \in \mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$.

В докладе рассматривается задача полного дескриптивно-функционального описания для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M каждого из классов пар функций

$$\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})] \overset{\mathrm{def}}{=} \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot;\mathcal{A}), \mathrm{ti}(\cdot;\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})\},$$

$$\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})] \overset{\mathrm{def}}{=} \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot;\mathcal{A}), \mathrm{ti}(\cdot;\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})\}.$$

Прежде чем сформулировать ответ в этой задаче, напомним [5, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $(^*, G_\delta)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\bigl([r,+\infty)\bigr)$ является G_δ-множеством в метрическом пространстве M. В частности, класс $(^*, G_\delta)$ – собственный подкласс второго класса Бэра [5, с. 249].

Решение сформулированной задачи даёт следующая

Теорема. *Для любых $n \geq 2$ и метрического пространства M справедливо равенство классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})] = \mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$, а пара функций (σ,τ), где $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ и $\tau\colon M \to \{0,1\}$, принадлежит этим классам тогда и только тогда, когда функции σ и τ принадлежат классу $(^*, G_\delta)$ и функция σ имеет непрерывную мажоранту.*

Замечание 1. Для любого метрического пространства M класс $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{1}}(\mathfrak{M})]$ состоит из пар (σ,τ), где $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ непрерывная и $\tau\colon M \to \{0,1\}$ полунепрерывная сверху функции, а класс $\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{1}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$ – из двух пар тождественно постоянных на M функций: $(0,0)$ и $(0,1)$.

Замечание 2. Описание классов функций $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\}$ и $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \in \mathcal{UZ}^n_{\mathfrak{R}}(M)\}$, состоящих из первых элементов пар классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$ и $\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$, для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M получено в [6], а описание класса функций, состоящего из вторых элементов пар класса $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$, легко извлекается из результата [7].

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. сочинений. В 6-ти т. Т. 2. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.
3. Миллионщиков В. М. *Указатели и символы условной устойчивости линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464.
4. Богданов Ю. С. *К теории систем линейных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.
5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М. – Л.: ОНТИ, 1937.
6. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1587–1599.
7. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: *Письмо в редакцию* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

ОБ ОЦЕНКЕ МАТРИЦЫ КОШИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧАСТЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е.А. Барабанов, Н.С. Нипарко

Хорошо известно, что если у линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с $n \geqslant 2$ и непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вещественные части всех собственных значений $\nu_i\big(A(t)\big)$, $i = \overline{1,n}$, матрицы $A(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ отрицательны (и даже отделены от нуля), то это ещё не гарантирует отрицательности (всех или некоторых) её показателей Ляпунова. Первые примеры такого рода построены Р. Э. Виноградом [1] (см. также [2, с. 124–126]).

Вместе с тем, если умножить правую часть системы (1), матрица коэффициентов которой удовлетворяет условию

$$\sup\{\operatorname{Re}\nu_i\big(A(t)\big) : t \in \mathbb{R}_+,\ i = \overline{1,n}\} = \Lambda < 0, \tag{2}$$

на любую достаточно большую положительную постоянную μ, то у получившейся системы

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

не только все показатели Ляпунова будут отрицательными, но будет отрицательным и её верхний особый (генеральный) показатель $\Omega_0(\mu A)$ [2, с. 110]. Именно, в работах [3] (см. также [4, с. 74–76]) и [5, с. 137–139] доказано, что если выполнено условие (2), то найдутся такие постоянные K и μ_0, что матрица Коши $X(t,\tau;\mu)$ системы (2) удовлетворяет оценке

$$\|X(t,\tau;\mu)\| \leqslant Ke^{\Lambda\mu(t-\tau)/2}$$

при всех $\mu \geqslant \mu_0$ и $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Относительно матрицы $A(t)$ дополнительно предполагается: в [3], что она равномерно непрерывна на полуоси, а в [5], что она удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, в [5] дана оценка сверху величины μ_0. Другими словами, умножение правой части системы (1) на достаточно большую положительную постоянную регуляризует систему в том смысле, что делает поведение её решений похожим на поведение решений линейной системы с постоянными коэффициентами.

Следующее утверждение обобщает приведённые результаты.

Теорема. *Пусть матричнозначная функция $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, ограничена, удовлетворяет условию Липшица и условию (2), а $\mu(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – положительная неубывающая неограниченная функция. Тогда существует такое положительное число D, что матрица Коши $X(t,\tau)$ системы*

$$\dot{x} = \mu(t)A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяет неравенству $\|X(t,\tau)\| \leqslant De^{\Lambda(\widehat{\mu}(t)-\widehat{\mu}(\tau))/2}$ при всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$, где $\widehat{\mu}(t) = \int\limits_0^t \mu(\xi)d\xi$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. Виноград Р. Э. *Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 2. С. 201–204.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.
3. Флетто Л., Левинсон Н. *Периодические решения сингулярно возмущённых систем* // Математика (период. сб. переводов). 1958. Т. 2. № 2. С. 61–68.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений.* М.: Наука, 1973.
5. Стрыгин В.В., Соболев В. А. *Разделение движений методом интегральных многообразий.* М.: Наука, 1988.

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВСКОГО, ПЕРРОНОВСКОГО И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОГО ТИПОВ

А.А. Бондарев

Настоящий доклад посвящён исследованию сочетаний ляпуновских и перроновских [1, 2], а также верхнепредельных [3] свойств дифференциальных систем. Она логически продолжает цикл работ [4–8] автора, усиливая их результаты:

1) работа [4] исправляла недостаток, указанный в [9, замечание 4], но построенная в ней двумерная система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, однако же ненулевым линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе же [5] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [6] построена двумерная система, обладающая как *перроновской*, так и *верхнепредельной*, с одной стороны, *полной неустойчивостью* (а поэтому и *ляпуновской глобальной неустойчивостью* тоже), а с другой стороны, *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех рассмотренных выше примеров, в которых эта частная устойчивость была лишь *точечной*);

4) в работе [7] представлена двумерная система, у которой имеется, с одной стороны, *ляпуновская глобальная неустойчивость* (которая имелась и у систем из работ [4–6]), а с другой стороны, как *перроновская*, так и *верхнепредельная глобальная устойчивость* (в отличие от всех примеров предложенных ранее);

5) в работе [8] результат из работы [7] был распространён на фазовые пространства сколь угодно высокой размерности, но лишь чётной.

Некоторые примеры столь контрастных сочетаний ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств представлены также в работе [10].

Нижеследующее усиление результатов работ [6–8], а также [10, теоремы 1 и 2] состоит, во-первых, в распространении их на случай неодномерных фазовых пространств сколь угодно высокой размерности (с некоторым дополнительным упорядочением свойств пограничных решений), а во-вторых, в том, что обе приводящиеся здесь системы обладают теперь уже не просто *ляпуновской глобальной неустойчивостью*, но даже и ляпуновской *крайней* неустойчивостью (см. п. 1 в теореме 2 ниже).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваем дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\right), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и допускают нулевое решение.

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

а также обладает следующими двумя свойствами:

1) *для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| \leqslant 1$, имеет место равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty;$$

2) *все остальные решения x удовлетворяют равенству*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для каждого $n > 1$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям (2) и (3), а также обладает следующими двумя свойствами:*

1) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| < \delta$, справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon^{-1};$$

2) *все решения* x *удовлетворяют равенству* (4).

Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неодномерны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяются на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [11];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [3].

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

3. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

4. Бондарев А. А. *Один пример неустойчивой системы* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.

5. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

6. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152.

7. Бондарев А. А. *О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1011–1019.

8. Bondarev A. A. *An Example of Contrasting Combination to Stability and Instability Properties in Even-Dimensional Spaces* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2022. V. 87. P. 25–36.

9. Сергеев И. Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

10. Бондарев А. А., Сергеев И. Н. *Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.

11. Сергеев И. Н. *Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем* // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Н. Ветохин

Для количественной оценки неустойчивости по начальным условиям в автономной динамической системе в книге [1, с. 274] было введено понятие локальной энтропии автономной динамической системы. Мы приведем аналогичное определение для случая неавтономной динамической системы.

Пусть X — локально компактное метрическое пространство, $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)),\ (f^{\circ i} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1,\ f^{\circ 0} \equiv \mathrm{id}_X),\ x,\ y \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x, \rho) = \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше, чем r. Тогда *локальную энтропию* неавтономной динамической системы f в точке x определяют формулой

$$h_d(f,x) = \lim_{r\to 0} \lim_{\rho\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho),$$

отметим, что пределы в последней формуле существуют, так как величина

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho)$$

не возрастает с уменьшением ρ и не убывает с уменьшением r. Для того, чтобы получить классическое определение локальной энтропии автономной динамической системы [1, с. 274], нужно в качестве последовательности f взять стационарную последовательность $(f, f, \dots)$.

Для фиксированной последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$, $f_k : X \to X$ рассмотрим функцию

$$x \mapsto h_d(f, x), \tag{1}$$

как показывает следующий пример функция (1) может быть разрывной на пространстве X даже в случае стационарной последовательности непрерывных отображений.

Рассмотрим отображение отрезка $[0,\ 1]$ в себя вида $t(x) = 4x(1-x)$. В книге [2, с. 502] установлено, что топологическая энтропия непрерывного отображения t равна $\ln 2$. Напомним, что в случае компактного метрического пространства X топологическая энтропия непрерывного отображения $g : X \to X$ вычисляется по формуле [2, с. 122]

$$h_{\mathrm{top}}(g) = \lim_{r\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(g, r, n),$$

где $N_d(g, r, n)$ максимальное число точек в X попарные d_n^f-расстояния между которыми больше чем r. Пусть $X = [-1, 1]$ и отображение g имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1,\ 0); \\ 4x(1-x), & \text{если } x \in [0,\ 1], \end{cases}$$

тогда для последовательности $(g, g, \dots)$ имеем $h_d(g, x) = 0$, при $x \in [-1,\ 0)$. Если $x = 0$, то найдутся бесконечно малая последовательность положительных действительных чисел $(\rho_m)_{m=1}^{\infty}$ и последовательность натуральных чисел $(q_m)_{m=1}^{\infty}$ такие, что выполнено равенство

$$g^{q_m}(\{x : |x| \leqslant 1/\rho_m\}) = [0,\ 1],$$

а следовательно для любого натурального числа n, $(q_m + n)$-я итерация отображения g совпадает с n-ой итерацией отбражения t, таким образом получаем оценку локальной энтропии отображения g в точке $x = 0$ снизу

$$h_d(g, 0) = \lim_{r\to 0} \lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{q_m + n} \ln N_d(g, r, q_m + n, 0, \rho_m) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{r\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(t,r,n)=h_{\mathrm{top}}(t)=\ln 2,$$

следовательно функция $x\mapsto h_d(g,x)$ имеет разрыв в нуле.

Возникают естественные вопросы о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (1) и о дескриптивном типе множества точек полунепрерывности сверху (снизу) этой функции.

Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве X называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что функция (1) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X. Для неавтономных динамических систем справедлив аналогичный результат.

Теорема 1. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f\equiv(f_1,f_2,\dots)$ функция (1) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X.*

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что множество точек полунепрерывности снизу функции (1) содержит всюду плотное множество типа G_δ. Оказывается справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f\equiv(f_1,f_2,\dots)$ множество точек полунепрерывности снизу функции (1) является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве X, а множество ее точек полунепрерывности сверху — множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве X.*

Если пространство X является множеством Кантора на отрезке $[0,\,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f,f,\dots)$, такая, что функция (1) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве X [3]. Оказывается справедлив более сильный результат

Теорема 3. *Если пространство X является множеством Кантора на отрезке $[0,\,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f,f,\dots)$ непрерывных отображений такая, что множество точек полунепрерывности сверху функции (1) пусто.*

Литература

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений.* М.: МЦНМО, 2005.

2. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* М.: Факториал, 1999.

3. Vetokhin A. N. *Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space.* International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE–2022"December 17–19, 2022, Tbilisi, Georgia. P. 228-231. http://mi.mathnet.ru/de6716

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ И ДИАМЕТРЫ ИХ РЕШЕНИЙ

А.С. Войделевич

В докладе рассматриваются линейные рекуррентные уравнения, которые являются дискретными аналогами линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1]. Решения таких уравнений представляют собой последовательности компактных выпуклых множеств пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, изучение которых представляет определённый интерес. Прежде чем сформулировать полученные результаты введём необходимые обозначения и приведём ряд определений.

Суммой Минковского $Z = X + Y$ двух множеств X, $Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{def}{=} \{x+y\colon x \in X,\, y \in Y\}$. Для действительной матрицы A, состоящей из d столбцов, и множества $X \subset \mathbb{R}^d$, через AX обозначим множество $\{Ax\colon x \in X\}$. Отметим, что для произвольных действительных матриц A, B и множества $X \subset \mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX + BX$.

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = \sum_{i=1}^{n} A_i X(t), \quad X(0) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

с действительными $d \times d$-матрицами коэффициентов A_i, $1 \leq i \leq n$.

Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Диаметром $\operatorname{diam} X$ множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется число $\sup_{a,b \in X} \|b - a\|_2$.

Определение 1. *Диаметром решения* $X(\cdot)$ уравнения (1) назовём последовательность диаметров $\operatorname{diam} X(0)$, $\operatorname{diam} X(1)$, $\ldots$ множеств $X(0)$, $X(1)$, $\ldots \in K_c(\mathbb{R}^d)$. Будем говорить, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра, если для произвольного его решения $X(\cdot)$ верно равенство $\operatorname{diam} X(t) = \operatorname{diam} X(0)$ при любом $t \in \mathbb{N}$.

Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра. Полное решение сформулированной задачи даёт следующая теорема.

Теорема 1. *У уравнения (1) тогда и только тогда все решения постоянного диаметра, когда существуют такие действительные числа* α_1, α_2, $\ldots$, α_n *и ортогональная* $d \times d$*-матрица* A, *что* $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_1| = 1$ *и* $A_i = \alpha_i A$, $1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим частный случай уравнения (1):

$$X(t+1) = \alpha X(t) + AX(t), \quad X(0) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $A \in M_d(\mathbb{R})$. Через $\mu_1(A)$ обозначим максимальное по модулю собственное значение матрицы A. Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ произвольной последовательности $x(0)$, $x(1)$, $\ldots$ действительных чисел определяется по формуле $\lambda[x] \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} |x(t)|^{1/t}$. Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ называется строгим, если существует предел $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)|^{1/t}$.

Теорема 2. *Пусть* $X_0 \in K_c(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (2), что* $X(0) = X_0$. *Тогда показатель Ляпунова* $\lambda[diam\, X]$ *диаметра решения* $X(\cdot)$ *является строгим и равен* $|\alpha| + |\mu_1(A)|$.

Литература

1. Hukuhara M. *Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe* // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДИАГОНАЛЬНОГО БЛОКА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^{\varkappa}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица, B – постоянная $n \times r$-матрица $r \leq n$, u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах [1 - 2] и др., при этом в периодическом случае множества частот решения и самой системы совпадали.

Вместе с тем, как следует из работ Х. Массера [3], Я. Курцвейль и О. Вейвода [4] и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Позднее такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Отметим, что случае периодических систем нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем [5, гл. III]: выбрать такое программное управление

$$u = u(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

В работе [6] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальные её блоки – нулевые. В настоящей докладе приведем необходимые условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром в случае, когда указанный блок является вырожденным.

Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, – некоторая матрица и $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$, $1 \leq l_1 < \ldots < l_q \leq m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_q}$ обозначим $s \times q$-матрицу, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1, \ldots, k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ldots, l_q$.

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы (вектора) $F(t)$ определим её среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega} F(t)dt$$

и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Под модулем частот матрицы $F(t)$ понимаем множество всевозможных линейных комбинаций с целыми коэффициентами показателей Фурье этой матрицы. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги переменной матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B не является максимальным и строки с номерами $k_1, \ldots, k_d$, $1 \le k_1 < \ldots < k_d \le n$ нулевые, т.е.

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r, \quad B^{1\ldots r}_{k_1\ldots k_d} = 0 \quad (d = n - r_1). \tag{4}$$

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d} \\ \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{k_1 k_1}, \ldots, \hat{a}_{k_d k_d}), \tag{5}$$

причем $\hat{a}_{k_1 k_1} \cdots \hat{a}_{k_d k_d} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\hat{a}_{k_{1+i-1}\, k_{1+i-1}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad 1 \le m < d, \tag{6}$$

а остальные элементы ненулевые.

Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \le k_{d+1} < \ldots < k_n \le n$ – номера ненулевых строк матрицы B. С учетом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t).$$

Через $\tilde{A}^{(1)}_{11}(t)$ обозначим $d \times m$-матрицу, составленную из первых m столбцов $d \times d$-блока $\tilde{A}_{11}(t)$. Построим $d \times (m + r_1)$-матрицу

$$\tilde{A}_*(t) = [\tilde{A}^{(1)}_{11}(t) \;\; A_{12}(t)].$$

Справедлива

Теорема. *Если для линейной системы (1), (4) – (6), разрешима задача управления асинхронным спектром, то выполняется оценка*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A}_*(t) = r_2 < r_1 + m.$$

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ “Конвергенция -2025” (подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Зубов, В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука,1975.

2. Макаров, Е. К., Попова, С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Минск: Бел. навука, 2012.

3. Massera, J.L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, № 1. P. 37 – 45.

4. Курцвейль, Я.,Вейвода, О. *О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362 – 370.

5. Деменчук А.К. *Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления.* Lambert Academic Publishing. Saarbrucken, 2012.

6. Деменчук А.К. *Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов* // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1-2. С. 22 – 29.

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАССЕРЫ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.К. Деменчук, А.В. Конюх

Рассмотрим линейную неоднородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, с непрерывными ω-периодическими матрицей коэффициентов $A(t)$ и свободным членом $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В работе [1] Х. Л. Массера доказал следующий замечательный результат: если у системы (1) существует ограниченное решение, то у неё существует и ω-периодическое решение. Другими словами, для существования у ω-периодической системы (1) ω-периодического решения необходимо и достаточно существования у неё ограниченного решения. Таким образом, теорема Массеры сводит задачу о наличии у системы (1) ω-периодического решения к задаче о наличии у неё ограниченного решения.

Последняя задача проще исходной, поскольку класс $\mathcal{B}$ ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ существенно шире его подкласса $\mathcal{P}_\omega$, состоящего из ω-периодических вектор-функций. Действительно, введём на множестве $\mathcal{B}$ метрику dist_u равномерной сходимости на оси: $\mathrm{dist}_\mathrm{u}(f, g) = \min\{1, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - g(t)\|\}$ для всех $f, g \in \mathcal{B}$. Обозначим получившееся метрическое пространство через $\mathcal{B}_\mathrm{u}$. Несложно показать, что множество $\mathcal{P}_\omega$ является замкнутым нигде не плотным в $\mathcal{B}_\mathrm{u}$, а значит, в частности, имеет в $\mathcal{B}_\mathrm{u}$ первую категорию по Бэру. Таким образом, почти все в смысле категории функции пространства $\mathcal{B}_\mathrm{u}$ не являются ω-периодическими. Тем не менее, согласно теореме Массеры, только из факта существования решения, принадлежащего "широкому" классу (классу $\mathcal{B}$) вытекает существование решения, принадлежащего "узкому" классу (классу $\mathcal{P}_\omega$) – ситуация в общем случае довольно редкая и, вообще говоря, довольно неожиданная.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли расширить класс $\mathcal{B}$ так, чтобы из того, что ω-периодическая система (1) имеет решение в этом более широком классе следовало бы, что она имеет и ω-периодическое решение.

Введём следующее

Определение. Скажем, что вектор-функция $x(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *растёт медленнее линейной функции*, если имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} (\|x(t)\|/t) = 0. \tag{2}$$

Класс непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, которые растут медленнее линейной функции, обозначим через $\mathcal{L}$. Очевидно, что класс $\mathcal{L}$ шире класса $\mathcal{B}$. Например, не ограниченная на $\mathbb{R}$ вектор-функция $(\ln(t^2{+}1), 1, \ldots, 1)^\mathrm{т}$ растёт медленнее линейной функции. Поэтому следующее утверждение усиливает теорему Массеры.

Теорема. *У ω-периодической системы (1) тогда и только тогда существует ω-периодическое решение, когда у неё существует решение, которое растёт медленнее линейной функции.*

Естественно возникает вопрос, насколько существенно расширение $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{B}$. Если рассматривать в $\mathcal{L}$ метрику dist_u равномерной сходимости на оси, то с точки зрения категорий различий между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ нет, так как в этой метрике $\mathcal{L}$ является объединением двух открытых множеств: интересующего нас множества $\mathcal{B}$ и его дополнения $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$.

Рассмотрим в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist_c}$ равномерной сходимости на отрезках, она задаётся равенством $\mathrm{dist_c}(f,g)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\min\{\|f(t)-g(t)\|,|t|^{-1}\}$ для всех $f,g\in\mathcal{L}$. Получившееся метрическое пространство обозначим через $\mathcal{L}_c$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{B}$ имеет в $\mathcal{L}_c$ первую категорию по Бэру. Таким образом, в метрическом пространстве $\mathcal{L}_c$ почти все функции в смысле категории не ограничены на оси, т.е. не принадлежат множеству $\mathcal{B}$.

Для полноты рассмотрения укажем, хотя это имеет к рассматриваемым вопросам косвенное отношение, что каждое из метрических пространств $\mathcal{B}_u$ и $\mathcal{L}_c$ является на самом себе множеством первой категории по Бэру.

В дополнение к сформулированной теореме отметим, что условие (2) является точным: для любого $\alpha>0$ существуют такие ω-периодические системы (1), у которых имеется решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условию $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}(\|x(t)\|/t)\geq\alpha$, и ω-периодические решения отсутствуют.

Литература

1. Massera J. L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations* // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475.

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРЫ ИНДЕКСОВ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.И. Зайдель

Для заданного натурального $n\geq 2$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Для краткости мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и пишем $A\in\in\mathcal{M}_n$.

Обозначим через $\mathrm{s}(A)$ индекс устойчивости системы $A\in\mathcal{M}_n$, т.е. размерность линейного подпространства её ограниченных решений, а через $\mathrm{es}(A)$ – индекс экспоненциальной устойчивости этой системы, т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова [1, с. 12].

В работе [2] О. Перрон построил пример системы $A\in\mathcal{M}_2$, индекс экспоненциальной устойчивости которой равен двум, и такого её непрерывного возмущения Q, экспоненциально убывающего к нулю на бесконечности, что оба индекса устойчивости возмущённой системы $A+Q\in\mathcal{M}_2$ равны единице, т.е. в примере Перрона имеет место потеря устойчивости.

Мы приведём обобщение этого эффекта, называемого теперь эффектом Перрона [3, гл. 4; 4], для чего для системы $A\in\mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t,\mu)\|\leq C_Q\exp(-\sigma_Q t)$ для всех $(t,\mu)\in\in\mathbb{R}_+\times M$, где C_Q и σ_Q – положительные постоянные (свои для каждой функции Q), и таких, что индексы устойчивости и экспоненциальной устойчивости системы $A+Q$, являющиеся функциями $\mu\in M$ и обозначаемые $\mathrm{s}(\cdot\,;A{+}Q)$ и $\mathrm{es}(\cdot\,;A{+}Q)$, не превосходят соответствующие индексы устойчивости системы A, т.е. $\mathrm{s}(\mu;A+Q)\leq\mathrm{s}(A)$ и $\mathrm{es}(\mu;A++Q)\leq\mathrm{es}(A)$ при всех $\mu\in M$.

Таким образом, ставится задача полного дескриптивно-функционального описания для каждого натурального числа $n \geq 2$ и метрического пространства M класса пар $\big((\mathrm{s}(A), \mathrm{es}(A)), \quad (\mathrm{s}(\cdot\,; A+Q), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q))\big)$, составленных из индексов устойчивости системы A и индексов устойчивости семейства $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т.е. класса

$$\Sigma\mathcal{E}_n(M) \equiv \big\{\big((\mathrm{s}(A), \mathrm{es}(A)),\ (\mathrm{s}(\cdot\,; A+Q), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q))\big) \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\big\}.$$

Прежде чем сформулировать полученный результат, напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [5, с. 224] функцией класса $(F_\sigma,^*)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big((r, +\infty)\big)$ луча $(r, +\infty)$ является F_σ-множеством пространства M, т.е. представляется в виде счётного объединения его замкнутых подмножеств. В частности, класс $(F_\sigma,^*)$ – подкласс второго класса Бэра [5, с. 249]. Кроме того, будем обозначать через $\mathcal{Z}_n$ множество $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Решение поставленной задачи даёт

Теорема. *Пусть n – натуральное число, большее единицы, и M – метрическое пространство. Пара $\big((\alpha_0, \beta_0), (\alpha(\cdot), \beta(\cdot)\big)$, где $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{Z}_n$ и $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)\colon M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\Sigma\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $\alpha_0 \geq \beta_0$;

2) $\alpha(\mu) \geq \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$;

3) $\alpha(\mu) \leq \alpha_0,\ \beta(\mu) \leq \beta_0$ для всех $\mu \in M$;

4) функции $\alpha(\cdot),\ \beta(\cdot)$ принадлежат классу $(F_\sigma, *)$.

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \geq 2$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определённая на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $\mathcal{A}(\cdot, \mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной).

Обычно семейство отображений $\mathcal{A}(\cdot, \mu)$, $\mu \in M$, рассматривают при одном из следующих двух естественных предположений: это семейство непрерывно либо **а)** в компактно-открытой топологии, либо **б)** в равномерной топологии. Условие **а)** равносильно тому, что если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность матриц $\mathcal{A}(t, \mu_k)$ сходится к матрице $\mathcal{A}(t, \mu_0)$ при $k \to +\infty$ равномерно на каждом отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$, а условие **б)** – что эта сходимость равномерна на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. Класс семейств (2), непрерывных в указанном выше смысле в компактно-открытой топологии, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а непрерывных в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Очевидно включение $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (2) и задающую его матричнозначную функцию $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)$ или $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)$.

Следствие. *Пусть M – метрическое пространство, и пусть $n \geq 2$. Классы пар функций $\Sigma\mathcal{C}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}(\cdot\,;\mathcal{A}), \mathrm{es}(\cdot\,;\mathcal{A}))\,|\,\mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)\}$ и $\Sigma\mathcal{U}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}(\cdot\,;\mathcal{A}), \mathrm{es}(\cdot\,;\mathcal{A}))\,|\, \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\}$ совпадают между собой и состоят из пар $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$ функций $M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежащих классу $(F_\sigma, *)$ и удовлетворяющих неравенству $\alpha(\mu) \geq \beta(\mu)$ при всех $\mu \in M$.*

Замечание. Описание классов, составленных из вторых элементов пар классов $\Sigma\mathcal{C}_n(M)$ и $\Sigma\mathcal{U}_n(M)$, получено в работе [6]: указанные классы совпадают между собой и состоят из функций $M \to \mathcal{Z}_n$ класса $(F_\sigma, *)$.

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.
2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. V. 31. № 5. P. 748–766.
3. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М., Ижевск: РХД, 2006.
4. Коровин С. К., Изобов Н. А. *Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550.
5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М. – Л.: ОНТИ, 1937.
6. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: *Письмо в редакцию* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ВАРИАНТ СМЕНЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА У ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, являющиеся линейными приближениями для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \geq t_0. \tag{2}$$

У этих систем m-возмущения $f(t,y)$ также являются бесконечно дифференцируемыми и имеют порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t,y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \mathrm{const}, \quad y \in R^2, \quad t \geq t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [1] устанавливает смену отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные значения у части решений системы (2) (с $m = 2$) и сохранение отрицательных показателей у решений оставшейся непустой части. Исследованию этого эффекта Перрона, в том числе и полного его варианта, посвящена серия наших работ (и в частности, совместных с С.К. Коровиным), завершившаяся полным описанием [2, 3] суслинскими множествами совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2) с возмущением (3).

Для возможных приложений бóльший интерес представляет противоположный антиперроновский эффект существования n-мерных системы линейного приближения со всеми положительными характеристическими показателями и возмущенной системы с возмущением соответствующего класса, имеющей нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова. Этот эффект для n-мерных дифференциальных систем исследован нами в случае линейных экспоненциально убывающих [4] и исчезающих на бесконечности [5] возмущений.

В настоящем сообщении предложен вариант этого антиперроновского эффекта в двумерном случае и для возмущений высшего порядка малости.

Для четвертей плоскости-пространства R^2 введем обозначения

$$R_1^2 = \{y = (y_1, y_2) \in R^2 : y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}, \quad R_2^2 = \{y \in R^2 : y_1 \leq 0, y_2 \geq 0\},$$

$$R_3^2 = \{y \in R^2 : y_1 \leq 0, y_2 \leq 0\}, \quad R_4^2 = \{y \in R^2 : y_1 \geq 0, y_2 \leq 0\}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Для любых параметров* $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0, \quad m_i \geq m_1 > \theta > 1, \quad i = 2, 3, 4,$ *существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями

$$\lambda_i(A) = \lambda_i, \quad i = 1, 2;$$

2) бесконечно дифференцируемое по $t \geq t_0$ *и* $y_1, y_2 \in R$ m_1 *- возмущение (3)*

$$f(t, y) : [t_0, +\infty) \times R^2 \to R^2,$$

являющееся m_i *-возмущением на множестве* $[t_0, +\infty) \times R_i^2$ *при всяком* $i = \overline{1, 4}$;

такие, что нелинейная возмущённая система (2) имеет решения

$$Y_i(t) \in R_i^2, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad i = \overline{1, 4},$$

с показателями Ляпунова

$$\lambda[Y_i] = \lambda_0(m_i) \equiv -\frac{(1 + \theta)(m_i \lambda_1 + \theta \lambda_2)}{m_i^2 - \theta^2}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы в трёхмерном и n-мерном случаях.

Литература

1. Perron O. *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 702–728.

2. Изобов Н.А., Ильин А.В. *Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.

3. Изобов Н.А., Ильин А.В. *Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1585–1589.

4. Изобов Н.А., Ильин А.В. *О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями*// Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.

5. Изобов Н.А., Ильин А.В. *Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1443–1452.

ВЕРХНИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

А.Ф. Касабуцкий, Е.И. Фоминых

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ совокупность всех таких линейных систем, а через $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ показатели Ляпунова системы (1).

Пусть $\sigma_1(t) \geq \ldots \geq \sigma_n(t)$ – сингулярные числа какой-либо фундаментальной матрицы $X(t)$, $t \geq 0$, системы (1). Величина

$$\overline{\sigma}_k(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

называется k*-м верхним сингулярным показателем* системы (1), его называют также её $(n-k+1)$*-й ляпуновской экспонентой* [1, с. 43]. В [2] показано, в частности, что сингулярные показатели (2) не зависят от выбора фундаментальной матрицы $X(\cdot)$ системы (1) и являются инвариантами преобразования Ляпунова. Геометрически число $\overline{\sigma}_k(A)$ – это точная верхняя граница изменения при $t \to +\infty$ показателей $(n-k+1)$-х главных полуосей эллипсоидов, являющихся образами единичной евклидовой сферы семейства линейных отображений $X(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, порождаемых решениями системы (1).

С общей точки зрения отличие верхних сингулярных показателей от показателей Ляпунова состоит в том, что первые являются асимптотическими характеристиками семейства линейных отображений $X(t)$, $t \geqslant 0$, в то время как вторые – это асимптотические характеристики её индивидуальных решений. Из теоремы Ляпунова и обобщённой теоремы Куранта–Фишера вытекает, что вычисление показателей Ляпунова и верхних сингулярных показателей отличаются друг от друга только порядком выполнения предельных переходов. Полное описание взаимного расположения сингулярных показателей и показателей Ляпунова системы (1) получено в работе [3]: $\overline{\sigma}_k(A) \leq \lambda_k(A)$, если $k < n$, и $\overline{\sigma}_n(A) = \lambda_n(A)$, и указанными соотношениями исчерпываются все соотношения между этими показателями систем из $\mathcal{M}_n$.

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определённая на временно́й полуоси матричнозначная функция $\mathcal{A}(\cdot, \mu)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна, ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной) и, если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность функций $\mathcal{A}(\cdot, \mu_k)$ при $k \to +\infty$ сходится к функции $\mathcal{A}(\cdot, \mu_0)$ равномерно на всей полуоси $t \geq 0$ (такое семейство далее называем *равномерным семейством* $\mathcal{A}$). При каждом фиксированном в семействе $\mathcal{A}$ значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, верхние сингулярные показатели которой обозначим через $\overline{\sigma}_1(\mu; \mathcal{A}) \leq \ldots \leq \overline{\sigma}_n(\mu; \mathcal{A})$, а значит, для каждого $k = 1, \ldots, n$ определена функция $\overline{\sigma}_k(\cdot\,; \mathcal{A})\colon M \to \mathbb{R}$, которую назовём k*-ым верхним сингулярным показателем семейства* $\mathcal{A}$. Естественно, возникает вопрос, что́ представляет собой каждая из функций

$\overline{\sigma}_k(\cdot\,;\mathcal{A})$, $k=1,\ldots,n$, для равномерного семейства $\mathcal{A}$. Свойства, которым удовлетворяют эти функции, содержит

Теорема 1. *Для каждых натурального $n \geq 2$ и метрического пространства M верхний сингулярный показатель $\overline{\sigma}_k(\cdot\,;\mathcal{A})$, $k=1,\ldots,n$, семейства $\mathcal{A}$ является функцией класса $(^*,G_\delta)$, имеющей непрерывные миноранту и мажоранту.*

Так как $\lambda_n(A)=\overline{\sigma}_n(A)$, то приведённые свойства показатель $\overline{\sigma}_n(\cdot\,;\mathcal{A})$ характеризуют полностью, как это следует из [4] или [5]. Для остальных верхних сингулярных показателей вопрос о том, дают ли эти свойства полное описание этих показателей для равномерных семейств, остаётся открытым. Доказано только следующее частичное обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Для каждых натуральных $n \geq 2$, фиксированного $k \leq n$, метрического пространства M и полунепрерывной сверху функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, имеющей непрерывные миноранту и мажоранту, существует такое равномерное семейство $\mathcal{A}$, для которого $\overline{\sigma}_k(\mu;\mathcal{A})=f(\mu)$ при всех $\mu \in M$.*

Литература

1. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости.* – М., Иж., 2006.

2. Барабанов Е. А., Фоминых Е. И. *Сингулярные показатели линейной дифференциальной системы и показатели её решений* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 1. С. 16–22.

3. Барабанов Е. А., Фоминых Е. И. *Описание взаимного расположения сингулярных показателей линейной дифференциальной системы и показателей её решений* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1587–1603.

4. Быков В. В. *Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.

5. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ПОДВИЖНОСТИ СТАРШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.А. Леваков, Д.А. Долженкова

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, d-мерное $(\mathfrak{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$. Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+g(t,x(t))dW(t), \tag{1}$$

где $A:R_+\to R^{d\times d}$ и $g:R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ – непрерывные функции, кроме того, A – ограниченная функция, g удовлетворяет глобальному условию Липшица по x. При этих условиях для любого $x_0\in R^d$ уравнение (1) имеет сильное решение с начальным условием x_0.

Число $\varrho(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(2t)^{-1}\ln E(\|x(t)\|^2)$, где $E(\|x(t)\|^2)$ – математическое ожидание случайной величины $\|x(t)\|^2$, называется верхним среднеквадратическим характеристическим показателем сильного решения $x(t)$ уравнения (1), а число $\sup\limits_{x\in A}\varrho(x)=\Lambda$, где Λ – множество всех сильных решений уравнения (1) с начальными условиями $x_0\in R^d$, – старшим среднеквадратическим показателем уравнения (1).

Число χ называется верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции g, удовлетворяющей условию $\|g(t,x)\| \le \delta\|x\| \ \ \forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, старший среднеквадратический показатель системы (1) не превосходит $\chi + \varepsilon$.

Число $\bar{\chi}$ называется достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического характеристического показателя системы (1), если оно является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется система (1) с функцией g, удовлетворяющей неравенству $\|g(t,x)\| \le \delta\|x\| \ \ \forall (t,x) \in R_+ \times R^d$, и со старшим среднеквадратическим показателем, не меньшим чем $\bar{\chi} - \varepsilon$.

Теорема. *Старший центральный показатель системы*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{2}$$

является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Старший центральный показатель диагональной системы (2) является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова* Минск: БГУ, 2006.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С ГЛАДКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \ge 0 \tag{1_μ}$$

с матрицами $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\,\mathrm{diag}\,[1,-1], & 2k-2 \le t < 2k-1, \\ (\mu + \gamma(\mu) + b_k)J, & 2k-1 \le t < 2k, \end{cases}$ где $k \in \mathbb{N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и непрерывные π-периодические функции $d_k(\cdot), \gamma(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работах [1–4] исследовался случай, когда $d_k(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \ge d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. При этом в [1] установлено отсутствие равномерных по μ оценок нормы решений системы (1_μ), а в [2] при наложении ограничения $d > 2^{10}$ доказана положительность старшего показателя Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемого как функция параметра μ, на множестве положительной меры Лебега.

В работах [3, 4] сделана попытка перенести указанный результат на общий случай, однако теорема из [3] неверна, а доказательство теоремы 2 из [4] также содержит ошибки.

Пусть $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Рассмотрим случай, когда выполнены условия

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}} = \alpha_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \ge 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv$ $\equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(\alpha_{k+1}-\alpha_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \ge 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [5, 6] (см. также [7]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

В работе [8] при выполнении условий (2) и в случае, когда $d(\cdot)$ – произвольная непрерывная функция, а $\gamma(\cdot) \equiv 0$, доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива. В настоящем докладе установлена положительность старшего показателя Ляпунова системы (1_μ) на множестве значений параметра положительной меры Лебега при условии дифференцируемости на $\mathbb{R}$ функций $d(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ и выполнения неравенства

$$\tilde{C} := \inf_{\mu\in\mathbb{R}}(1+\gamma'(\mu)) > 2|d'(\mu)|e^{4d(\mu)}, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{3}$$

и оценки

$$\int\limits_0^{\pi} d(\mu)\,d\mu > 2^{10}(1+\tilde{C}^{-1}). \tag{4}$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k =$ $= \eta_k(\mu) \ge 1$ и $\psi_k = \psi_k(\mu)$ следующим образом. Обозначим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) :\equiv 0$, $\xi_k = \xi_k(\mu) := 2\psi_k(\mu)+\alpha_k+\mu+\gamma(\mu)$, $q_k(\mu) := 2\pi[2^{-1}\pi^{-1}\xi_k(\mu)]$ ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа). Поскольку $\eta_k \ge 1$ и, следовательно $\operatorname{sh}(2\ln\eta_k) \ge 0$, найдутся единственные $1 \le \eta_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\varphi_k = \varphi_k(\mu) \in [q_k(\mu)-2^{-1}\pi, q_k(\mu)+2^{-1}\pi)$, такие что выполнены равенства

$$\mathrm{s}h\ \ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k|,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_k = (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k \text{ если } \sin\xi_k \ne 0, \quad \varphi_k = \xi_k \text{ в случае когда } \sin\xi_k = 0.$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1}(\mu) := \psi_k(\mu) + 2^{-1}\varphi_k(\mu) + \dfrac{\pi}{2}\beta(\mu)$, где $\beta(\mu) = 0$ если $\xi_k(\mu) \in$ $\in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[2\pi n - 2^{-1}\pi, 2\pi n + 2^{-1}\pi)$, $\beta(\mu) = 1$ для всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.

Далее всюду будем предполагать выполненными условия (2) и (3).

Лемма 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ функции η_k и ψ_k дифференцируемы по μ и имеет место представление*

$$X_{A_\mu}(2^n-1,0) = U(\psi_n)\begin{pmatrix} \eta_n & 0 \\ 0 & \eta_n^{-1} \end{pmatrix}U(\psi_n).$$

Лемма 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенство*

$$\psi_k(\pi) - \psi_k(0) = (2^{k-1}-2^{-1})\pi.$$

и для всех $\mu \in \mathbb{R}$ оценка

$$\psi_k'(\mu) > 0.$$

Лемма 3. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\pi \ln|\cos\xi_k(\mu)|\,d\mu \geq -2^5k - 2\pi\ln(1+\tilde{C}^{-1}).$$

Теорема. *Старший характеристический показатель* $\lambda_2(A_\mu)$ *системы* (1_μ) *при выполнении условий (2)–(4) положителен для всех* μ *из некоторого множества* J *положительной меры Лебега.*

Литература

1. Липницкий А.В. *Оценки снизу нормы решений линейных дифференциальных систем с линейным параметром* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 412–416.

2. Липницкий А.В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

3. Липницкий А.В. *Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 171–177.

4. Липницкий А.В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 3. С. 270–277.

5. Миллионщиков В.М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.

6. Миллионщиков В.М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.

7. Липницкий А.В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

8. Липницкий А.В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 4. С. 470–476.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ НОРМИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ МАТРИЦЫ КОШИ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ для всех $t \geq 0$. Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$.

Определение 1. Пусть τ – возрастающая последовательность $t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1}$, состоящая из $s+2$ вещественных чисел. Выражение

$$P_A(\tau) = \prod_{i=0}^{s} \|X_A(t_{i+1}, t_i)\|$$

будем называть нормированным разбиением матрицы Коши для системы (1).

Нормированные разбиения широко распространены в теории показателей Ляпунова. Формулы для вычисления центрального [1, с. 48]

$$\Omega(A) = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \|X_A(kT, kT-T)\|$$

и экспоненциального показателя [1, с. 57]

$$\nabla_0(A) = \lim_{\theta\to1+0} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=1}^{m} \ln \|X_A(\theta^k, \theta^{k-1})\|,$$

содержат выражения вида $\Xi_A(\tau) = \ln P_A(\tau)$ при некоторых подходящих τ. Старший сигма-показатель [1, с. 214] (показатель Изобова) системы (1), определяемый равенствами $\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\xi_m(\sigma)$, $\xi_m(\sigma) = \max_{i<m}(\ln\|X_A(m,i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i), \xi_1 = 0, i \in \mathbb{N},$ можно представить [2] в эквивалентной форме

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{\tau\in\mathcal{D}_0(m)} (\Xi_A(\tau) - \sigma\|\tau\|_{\mathrm{i}}), \tag{2}$$

где $\mathcal{D}_0(m)$ – множество всех возрастающих последовательностей $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1} = m$ целых чисел с не менее чем двумя членами и $\|\tau\|_{\mathrm{i}} = t_1 + \ldots + t_s$.

Зафиксируем некоторый замкнутый выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $K \cap (-K) = \{0\}$. Линейный функционал $\mu \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется положительным на K, если $\mu(x) \geq 0$ для всех $x \in K$. Сопряженный к K конус, т.е. множество K^+ всех положительных на K линейных функционалов будем обозначать через K^+.

Определение 2. [3, с. 83] Пусть $y : K \to \mathbb{R}^m$ – произвольное отображение. Линейный функционал $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется характеристическим функционалом отображения y относительно конуса K, если для всех $\mu \in K^+$, $\mu \neq 0$, выполнено неравенство

$$\limsup_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^{-1}(\lambda x + \mu x + \ln\|y(x)\|) > 0$$

и при этом

$$\limsup_{\|x\|\to+\infty} \|x\|^{-1}(\lambda x + \ln\|y(x)\|) = 0.$$

Множество $\mathcal{M}[y]$ всех характеристических функционалов отображения y называется его характеристическим множеством.

Определение 3. Модифицированным характеристическим показателем отображения y называется функция $\psi[y] : K \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, задаваемая равенством $\psi[y](x) := \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \ln\|y(tx)\|.$

Существует взаимосвязь между модифицированным характеристическими показателями и характеристическими функционалами. В [4] было доказано, что если $\ln\|y\|$ – липшицева функция, то $\mathcal{M}[y] = \mathcal{M}[\exp\psi[y]]$.

Пусть $t_0 = 0$. Зафиксируем некоторое $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательности $0 < t_1 < \ldots < t_{k+1}$ вещественных чисел с $k+1$ элементами как векторы $(t_1, \ldots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Полагая $K = \{\tau = (t_1, \ldots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : 0 \leq t_1 < \ldots \leq t_{k+1}\}$, определим множество $\mathcal{M}[P_A]$ и функцию

$$\Psi_A(\tau) = \psi[P_A](\tau) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln P_A(t\tau)$$

согласно определениям 2 и 3.

Предложение 1. *Имеет место равенство* $\mathcal{M}[P_A] = \mathcal{M}[\exp \Psi_A]$.

Предложение 2. *Пусть* $\lambda \in \mathcal{M}[\Psi_A]$ *. Если для некоторой последовательности векторов* $\tau_j \in K$ *такой, что* $\|\tau_j\| \to \infty$ *и* $\tau_j\|\tau_j\|^{-1} \to \xi^0 \in K$ *при* $j \to \infty$ *, имеем равенство*

$$\lim_{j\to\infty} \|\tau_j\|^{-1}(\lambda\tau_j + \ln P_A(\tau_j)) = 0,$$

то $\lambda\xi^0 + \Psi_A(\xi^0) = 0$ *и* $\lambda\xi + \Psi_A(\xi) \geq 0$ *для всех* $\xi \in K$ *.*

Мы не можем использовать эти результаты для вычисления $\nabla_\sigma(A)$, так как длина последовательности τ в (2) может неограниченно возрастать с увеличением m . Однако мы можем применить предложения 1 и 2 для получения некоторой информации о конечно-точечных приближениях $\nabla_\sigma(A)$. Пусть $\mathcal{D}_0^k(m)$ – подмножество $\mathcal{D}_0(m)$, содержащее последовательности с не более чем k элементами.

Определение 4. Число $\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max_{\tau\in\mathcal{D}_0^k(m)} (\Xi_A(\tau) - \sigma\|\tau\|_{\mathrm{i}})$. будем называть k -точечным приближением для $\nabla_\sigma(A)$.

Предложение 3. *Если* $(\sigma, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *является крайней точкой надграфика* $\nabla_\sigma^k(A)$ *, то вектор* $(-\sigma, \ldots, -\sigma, -\mu) \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$ *является характеристическим вектором для* P_A *.*

Следствие. *Если* $(\sigma, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *является экстремальной точкой для надграфика* $\nabla_\sigma^k(A)$ *, то*

$$\sigma \sum_{i=1}^{k} \xi_i + \mu\xi_{k+1} \leq \Psi_A(\xi)$$

для всех $\xi \in K$ *и существует некоторое* $\xi^0 \in K$ *такое, что*

$$\sigma \sum_{i=1}^{k} \xi_i^0 + \mu\xi_{k+1}^0 = \Psi_A(\xi^0).$$

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Минск: БГУ, 2006.

2. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.

3. Гайшун И. В. *Линейные уравнения в полных производных.* Минск: Наука и техника. 1989.

4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

ОБ ОТКРЫТОСТИ ПОЛНОГО СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big)$. Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n-го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел.

Наряду с системой (1) рассмотрим мультипликативно возмущенную систему

$$y(k+1) = \big(A(k)R(k)\big)y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где матрица возмущений $R\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ также предполагается вполне ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Систему (2) отождествим с матрицей возмущений $R(\cdot)$. Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через $\mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{R}_\delta$ — его подмножество, отвечающее возмущениям $R(\cdot)$, для которых справедлива оценка $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|R(k) - E\| < \delta$ с фиксированным $\delta > 0$; здесь $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Обозначим

$$\lambda(\mathcal{R}_\delta) \doteq \big\{\lambda(AR)\colon R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta\big\}.$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}\colon \max_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\big\}.$$

Определение. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если отображение $R(\cdot) \mapsto \lambda(AR)$ открыто в точке $R(k) \equiv E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{R}_\varepsilon)$.

Теорема. *Полный спектр показателей Ляпунова каждой двумерной системы вида* (1) *открыт.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ УСТОЙЧИВОСТИ И МЕРЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.Н. Сергеев

В докладе вводится новое понятие, содержательно развивающее понятия устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы и допускающее естественную вероятностную интерпретацию, хотя формально никак не использующее стохастическую терминологию и вообще не связанное со случайностью.

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot x = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \tag{1}$$

Положим $B_\rho = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| < \rho\}$ и $\rho_0 \equiv \sup\{\rho \mid B_\rho \subset G\}$, а через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0,x_0) = x_0$.

Определение 1. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского* или *верхнепредельного* типа – при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно:

1) [1, 2] *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t,x_0)| < \varepsilon, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t,x_0)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) [1, 2] *полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2) (в частности, возможно, решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$);

3) (см. [2]) *почти устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры (здесь и ниже – Лебега);

4) (см. [2]) *почти полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры;

5) μ*-устойчивостью* при данном $\mu \in [0,1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество *относительной* меры $\mathrm{M}_\varkappa(\mathrm{f}, \varepsilon, \rho)$ (т.е. долей от меры B_ρ), не меньшей μ;

6) ν*-неустойчивостью* при данном $\nu \in [0,1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество относительной меры $\mathrm{N}_\varkappa(\mathrm{f}, \varepsilon, \rho)$, не меньшей ν.

Корректность определения 1 обосновывает

Теорема 1. *Для любой системы (1), любого $\varepsilon > 0$ и каждого из требований (2) множества всех точек $x_0 \in G$, как удовлетворяющих этому требованию, так и не удовлетворяющих ему, измеримы.*

Правомерность нижеследующего определения 2 обеспечивает

Теорема 2. *Для любой системы (1) множество всех значений $\mu \in [0,1]$ (равно как и всех значений $\nu \in [0,1]$), для которых она обладает ляпуновской, перроновской или верхнепредельной μ-устойчивостью (соответственно, ν-неустойчивостью), заведомо содержит точку 0 и представляет собой промежуток, возможно, вырожденный в точку.*

Определение 2. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* – такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0,1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ-устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ не обладает ею;

б) *мерой неустойчивости* – такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0,1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ система (1) обладает ν-неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ не обладает ею.

Конкретные формулы для мер устойчивости и неустойчивости предлагает

Теорема 3. *Для каждой системы (1) однозначно определена шестёрка её ляпуновских, перроновских и верхнепредельных мер устойчивости или неустойчивости, которые соответственно задаются формулами*

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\rho\to+0} \mathrm{M}_\varkappa(\mathrm{f}, \varepsilon, \rho), \quad \nu_\varkappa(\mathrm{f}) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\rho\to+0} \mathrm{N}_\varkappa(\mathrm{f}, \varepsilon, \rho), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \tag{3}$$

причём в них пределы при $\varepsilon \to +0$ могут быть заменены точной нижней или, соответственно, верхней гранью по $\varepsilon > 0$.

Набор основных соотношений, связывающих различные меры устойчивости и неустойчивости, задаёт

Теорема 4. *Для любой системы (1) выполнены неравенства*

$$0 \leqslant \mu_\lambda(f) \leqslant \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu_\pi(f) \leqslant \nu_\sigma(f) \leqslant \nu_\lambda(f) \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leqslant 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Если в первом из равенств (3) нижний предел при $\rho \to +0$ заменить верхним, то полученная величина в сумме с мерой неустойчивости будет давать уже в точности 1 и, более того, она будет оценивать возможность выбора начального значения возмущённого решения с требованием (2) не снизу, а сверху.

Естественную связь почти устойчивости и почти полной неустойчивости с единичными значениями соответствующих мер раскрывает

Теорема 5. *Система (1) обладает почти устойчивостью или почти полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает 1-устойчивостью или, соответственно, 1-неустойчивостью этого типа, и тогда её мера устойчивости того же типа равна 1, а неустойчивости — 0 или, соответственно, наоборот.*

Ниже нас будут особенно интересовать стандартные подклассы систем (1), обладающих определёнными дополнительными свойствами, а именно:

а) *одномерные* системы — в случае $n = 1$;

б) *автономные* системы — их правые части не зависят от t;

в) *линейные* однородные системы — с правыми частями вида $A(t)x$, где $A : \mathbb{R}_+ \to \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и $G \equiv \mathbb{R}^n$, в частности, *ограниченные* или *скалярные* – для них соответственно имеем

$$\|A\| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t)| < +\infty \quad \text{или} \quad A(t) = a(t)I, \quad a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

Указанная в теореме 5 логическая связь между конкретными свойствами и мерами оказывается лишь односторонней, что и подтверждает

Теорема 6. *При $n = 2$ существуют две автономные системы вида (1), не обладающие ни почти устойчивостью, ни почти полной неустойчивостью ни одного из трёх типов: у одной из них меры устойчивости или неустойчивости всех трёх типов равны соответственно 1 или 0, а у другой – наоборот.*

В линейном случае ляпуновские и верхнепредельные меры могут принимать лишь свои крайние значения, заведомо реализуемые также и на перроновских мерах, – это и устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 7. *Для любой линейной системы (1) возможны только следующие две ситуации, причём в формулах (3) для всех упоминаемых в них мер устойчивости и неустойчивости нижние пределы при $\rho \to +0$ являются точными:*

1) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 1 > 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает устойчивостью всех трёх типов;

2) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает ляпуновской и верхнепредельной полной или почти полной неустойчивостью.

Теорема 8. *При любом* $n \in \mathbb{N}$ *каждая из перечисленных в теореме 7 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной скалярной линейной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах: одна из них обладает перроновской устойчивостью, а другая – перроновской полной неустойчивостью.*

Множество всевозможных наборов различных мер устойчивости и неустойчивости одномерных систем конечно, как показывают

Теорема 9. *При* $n = 1$ *меры устойчивости и неустойчивости любой системы (1) удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f), \quad \nu_\pi(f) \leqslant \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f), \tag{4}$$

$$\mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \in \{0,\, 1/2,\, 1\}, \quad \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \tag{5}$$

Теорема 10. *При* $n = 1$ *оба неравенства в цепочках (4) для некоторой ограниченной линейной системы (1) являются строгими, а случаи всех равенств в этих цепочках для каждой пары мер устойчивости и неустойчивости, задаваемой условиями (5), реализуются на некоторых автономных системах (1).*

В теореме 6 попутно подтверждена реализуемость как нулевых, так и единичных значений сразу всеми мерами устойчивости или неустойчивости для двумерных автономных систем. Более того, для таких систем множество реализуемых наборов всех мер оказывается уже довольно богатым, о чём и говорят

Теорема 11. *При* $n = 2$ *для каждого отдельного нестрогого неравенства в цепочках (4) существуют две автономные системы вида (1): для одной из них оно обращается в равенство, а для другой – в строгое неравенство.*

Теорема 12. *При* $n = 2$ *для любого* $r > 0$ *существует автономная система (1), у которой меры устойчивости всех трёх типов принимают одно и то же положительное значение, равно как и все меры неустойчивости, причём отношение этих двух значений равно* r*, а правое неравенство в цепочке (4) обращается в равенство.*

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

3. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

4. Сергеев И. Н. *Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы* // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

П.А. Худякова

А. М. Ляпунов назвал [1, с. 43] линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(t)$ *приводимой*, если существует линейное невырожденное при всех $t \geq 0$ преобразование $x = L(t)y$, $t \geq 0$, с непрерывно дифференцируемой $n \times n$-матрицей $L(t)$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t \geq 0} \Big(\|\dot{L}(t)\| + \|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| \Big) < +\infty$ (такое линейное преобразование называется *преобразованием Ляпунова* [2, с. 74]), которое переводит систему (1) в линейную дифференциальную систему с постоянной матрицей коэффициентов. Приводимые системы образуют класс систем, по своим свойствам наиболее близкий к системам с постоянными коэффициентами. Значительные результаты по теории приводимых систем получены Н. П. Еругиным [3]. В частности, в [3, с. 9] установлен следующий критерий приводимости: система (1) приводима тогда и только тогда, когда некоторая её фундаментальная матрица $X(t)$ представима в виде $X(t) = L(t)\exp(Bt)$, $t \geq 0$, где $L(t)$ – матрица преобразования Ляпунова, а B – постоянная матрица.

Во многих задачах теории дифференциальных уравнений возникает вопрос о возможности такой характеризации того или иного свойства дифференциальных систем, которая позволяла бы единообразно на языке функционала, определённого на пространстве систем, отличать системы с данным свойством от систем, этим свойством не обладающих. Прежде чем привести такой критерий для свойства приводимости, дадим нужные определения. Для системы (1) определим вспомогательную функцию

$$\Phi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{C \in SL_n(\mathbb{R}),\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}} \ \sup_{t \geqslant 0} \max\left\{ \left\|X(t)Ce^{-Bt}\right\|,\, \left\|e^{Bt}C^{-1}X^{-1}(t)\right\| \right\},$$

где $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ – специальная линейная группа порядка n над полем $\mathbb{R}$ (группа по умножению, состоящая из постоянных вещественных $n \times n$-матриц с определителем 1), $\mathbb{R}^{n\times n}$ – векторное пространство $n \times n$-матриц, а $X(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (1) (несложно видеть, что функция $\Phi(A)$ от выбора матрицы $X(t)$ не зависит). Функция $\Phi(A)$ принимает значения, не меньшие единицы, и, вообще говоря, может принимать несобственное значение $+\infty$. В отличие от неё функция $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\Phi(A)$ принимает значения на отрезке $[0, 1]$ (как обычно, считаем $\mathcal{P}(A) = 0$, если $\Phi(A) = +\infty$).

Теорема 1. *Система (1) приводима, если и только если* $\mathcal{P}(A) > 0$, *и не приводима, если и только если* $\mathcal{P}(A) = 0$.

Через $\mathcal{M}_n$ обозначим векторное пространство систем (1) с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси матрицами коэффициентов (далее отождествляем систему и задающую её матрицу коэффициентов). В пространстве $\mathcal{M}_n$ рассмотрим две топологии: компактно-открытую и равномерную (каждая из них метризуема, и последовательность систем (т.е. их матриц коэффициентов в силу указанного отождествления) сходится в первой из этих топологий, если она сходится равномерно на каждом отрезке временно́й полуоси, и во второй из них – если она сходится равномерно на всей временно́й полуоси). Векторное пространство $\mathcal{M}_n$ систем с компактно-открытой топологией обозначим через $\mathcal{M}_n^{\mathrm{c}}$, а с равномерной – через $\mathcal{M}_n^{\mathrm{u}}$. Несложно видеть, что множество систем (1), матрицы коэффициентов которых постоянны, является замкнутым в любом из этих пространств. Вместе с тем из теоремы 1 с помощью рассуждений, аналогичных [4] и [5], следует, что имеет место следующая

Теорема 2. *В каждом из пространств* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{u}}$, $n \geqslant 2$, *и* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{c}}$, $n \in \mathbb{N}$, *множество приводимых систем является множеством точного класса* F_σ.

Литература

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Былов Б. Ф, Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966.

3. Еругин Н. П. *Приводимые системы* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 13. Л. – М.: Изд-во АН СССР. 1946. С. 3 – 96.

4. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42 – 63.

5. Худякова П. А. *Полное описание множеств приводимости линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 613–626.

УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К.М. Чудинов

Будем говорить, что непрерывная функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, осциллирует, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента, в отличие от решений уравнений без запаздывания, могут осциллировать начиная с первого порядка: в частности, хорошо известно, что решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geq 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений первого порядка с запаздыванием впервые систематически изучал А. Д. Мышкис [1] в середине XX века, однако первые уточнения его результатов появились только в 70-х гг.

Рассмотрим два известных условия осцилляции всех решений линейного неавтономного уравнения

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где функции a и h непрерывны и $h(t) \leq t$. Будем называть уравнение (1) *уравнением устойчивого типа*, если $a(t) \geq 0$ и $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Наиболее сильным по простоте и точности обобщением условий осцилляции, найденных Мышкисом, явилась следующая теорема, полученная Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия.

Теорема 1 [2]. *Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

В те же годы некоторые исследователи обратили внимание на следующий легко доказываемый факт. Положим $g(t) = \max\{s \leq t \mid h(s)\}$.

Теорема 2. *Если* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{g(t)}^{t} a(s)\,ds > 1$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

Отметим, что замена функции h функцией g в теореме 1 не ослабляет результата, поскольку значение нижнего предела не изменяется; напротив, в теореме 2 существенно неубывание функции g, поэтому замена ее произвольной функцией h дает неверное утверждение.

Уточнения и обобщения теорем 1 и 2 составили в последние 30 лет два основных направления исследования условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента. По этим направлениям за это время опубликованы сотни работ. Приведем некоторые результаты развития этих направлений, полученные за последние несколько лет.

Рассмотрим уравнение с несколькими запаздываниями.

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t) x(h_k(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где для $k = \overline{1, m}$ функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы и $h_k(t) \leq t$ почти всюду. При заданной измеримой по Борелю начальной функции уравнение (2) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций. Уравнение (2) назовем уравнением устойчивого типа, если $a_k(t) \geq 0$ и $h_k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Нетрудно уточнить теоремы 1 и 2 следующим образом.

Теорема 3. *Положим* $h(t) = \max_k h_k(t)$ *и* $g(t) = \max_k g_k(t)$. *Если выполнено одно из условий*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int_{h(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} a_k(s)\, ds > 1/e, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \int_{g(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} a_k(s)\, ds > 1,$$

то все решения уравнения (2) *устойчивого типа осциллируют.*

Очевидный недостаток этих результатов иллюстрирует, например, ситуация, когда для некоторых k и t имеем $h_k(t) = t$. Проблема состоит в том, чтобы учесть в равной мере все m запаздываний. Ее решает следующая теорема.

Определим m семейств множеств $E_k(t) = \{s \geq t \mid h_k(s) < t\}$, $k = \overline{1, m}$.

Теорема 4 [3, 4]. *Если выполнено одно из условий*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k(t)} a_k(s)\, ds > 1, \quad \varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k(t)} a_k(s)\, ds > 1/e,$$

то все решения уравнения (2) *устойчивого типа осциллируют.*

Отметим, что теорема 4 даже в случае $m = 1$ существенно обобщает теоремы 1 и 2.

Недавно были найдены обобщения теоремы 4 на уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_{0}^{t} x(s)\, d_s r(t, s) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, функция $r(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию для всех t, функция $\rho(t) = \bigvee_{s=0}^{t} r(t, s)$ локально суммируема и функция $r(\cdot, s)$ измерима для всех s. Соответствующее уравнению (3) неоднородное уравнение включает как частные случаи уравнение (2) с сосредоточенными запаздываниями, интегро-дифференциальные уравнения с последействием и уравнения, содержащие последействия разных типов (при этом начальная функция переносится в правую часть). Для обобщения теоремы 4 достаточно исследовать однородное уравнение (3).

Уравнение (3) является уравнением устойчивого типа, если для всех t функция $r(t, \cdot)$ не убывает и для всех $s \geq 0$ существует такое $T(s) > s$, что для всех $\sigma \leq s$ и $\tau \geq T(s)$ имеем $r(\tau, \sigma) = 0$.

Теорема 5 [5]. *Если выполнено одно из условий*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds>1,\qquad \varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds>1/e,$$

то все решения уравнения (3) *устойчивого типа осциллируют.*

Работа выполнена при финансовой поддержке при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2023-0005).

Литература

1. Мышкис А. Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом* // Матем. сб. 1951. Т. 70. № 3. С. 641–658.

2. Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А. *О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравн. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465.

3. Chudinov K. *Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations* // *Electron J. Qual. Theory Differ. Eq.* 2016. № 2. 10 с.

4. Чудинов К. М. *Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе — Чантурия* // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

5. Chudinov K. M. *The Koplatadze–Chanturiya type theorem for linear first-order delay differential equation of general form* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. Т. 87. С. 53–62.

ON ASYMPTOTIC EQUIVALENCE OF HIGHER-ORDER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. V. Astashova

We study the problem of asymptotic equivalence of the equations

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|y(x)|^k\,\operatorname{sgn}y(x)=f(x) \tag{1}$$

and

$$z^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|z(x)|^k\,\operatorname{sgn}z(x)=0 \tag{2}$$

with $n\ge 2$, $k>1$, and continuous functions $p(x)$, $f(x)$ and $a_j(x)$. Equation (2) is a so-called Emden–Fowler type differential equation. It was considered from different points of view (see for example [1, 2] and the bibliography there). In particular, the asymptotic behavior of its solutions vanishing at infinity is described. (See also [3–6].) So, if an asymptotic equivalence of equations (1) and (2) exists, it is possible to describe the asymptotic behavior of vanishing at infinity solutions to equation (1), too. Previous results are formulated in [7–10]. The asymptotic equivalence of ordinary differential equations and their systems can be useful to investigate some problems for partial differential equations (see, for example, [11]). Note that the notion of asymptotic equivalence can be used in different senses (cf.[10, 12–19]).

Hereafter we denote $|y|^k\operatorname{sgn}y$ by $[y]^k_\pm$.

Theorem 1. *Let $a_0,\dots,a_{n-1}$, f, g, and p be continuous functions defined in a neighborhood of ∞. Suppose that p, f, and g are bounded while $a_0,\dots,a_{n-1}$ satisfy the inequalities*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1}|a_j(x)|\,dx<\infty,\ j\in\{0,\dots,n-1\}. \tag{3}$$

If y is a solution to the equation

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}+p(x)[y(x)]_{\pm}^{k}=f(x)\,e^{-\gamma x} \tag{4}$$

with $n\ge 2$, $k>1$, $\gamma>0$ and $y(x)\to 0$ as $x\to+\infty$, then there exists a unique solution z to the equation

$$z^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)z^{(j)}(x)+p(x)[z(x)]_{\pm}^{k}=g(x)\,e^{-\gamma x} \tag{5}$$

such that $|z(x)-y(x)|=O(e^{-\gamma x})$ as $x\to+\infty$.

To prove this theorem we need the following lemmas.

Lemma 1. *Any linear differential operator*

$$L:y\mapsto y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}a_j y^{(j)} \tag{6}$$

with all continuous functions $a_j(x)$ satisfying (3) can be represented in a neighbourhood of $+\infty$ as the composition operator

$$L=D_b=b_0B_1\circ\cdots\circ B_n,$$

where $b=(b_0,b_1,\dots,b_n)$, all B_j, $j=1,\dots,n$, are the first-order operators $u\mapsto(b_ju)'$ and each b_j, $j=0,\dots,n$, is a $\mathcal{C}^j$ function satisfying at infinity the following conditions:

(i) $b_j(x)\to 1$,

(ii) $x^i b_j^{(i)}(x)\to 0$ *for all* $i\in\{1,\dots,j-1\}$,

(iii) $\to{}_{x_0}x^{i-1}\left|b_j^{(i)}(x)\right|dx<\infty$ *for all* $i\in\{1,\dots,j\}$ *and some* $x_0\in\mathbb{R}$.

Now, for $b=(b_0,b_1,\dots,b_n)$ and $j\in\{0,\dots,n\}$ put

$$b-j=(b_j,\dots,b_n).$$

Note that if a tuple b satisfies the conditions from Lemma 1, then so does the tuple $b-j$.

Lemma 2. *Let $b=(b_0,b_1,\dots,b_n)$ satisfy the conditions from Lemma 1. If a function y satisfies at infinity both $y\to 0$ and $D_b(y)\to 0$, then the same is true for all functions $D_{b-j}(y)$, $0<j<n$.*

Lemma 3. *Suppose a tuple $b=(b_0,b_1,\dots,b_n)$ satisfies the conditions from Lemma 1 and a function y satisfies, on a segment I of length Δ, the inequality $|D_{b-j}(y)|\ge W$ with some $j\in\{1,\dots,n\}$ and a constant $W>0$. Then there exists a segment $I'\subset I$ of length $4^{j-n}\Delta$ with $|y(x)|\ge(2^{j-n}\,\beta)^{n+1-j}\,W\Delta^{n-j}$ for all $x\in I'$.*

Now we can formulate the following

Corollary. *Under the conditions of Theorem 1, a function* y *is a solution to equation (4) tending to zero as* $x \to +\infty$ *if and only if*

$$b_n y = (J_{n-1} \circ \dots \circ J_0)\Big[e^{-\gamma x} f(x) - p(x)[y(x)]_{\pm}^{k}\Big], \tag{7}$$

where the operators J_j *take each sufficiently rapidly decreasing continuous function* φ *to the vanishing at infinity primitive function of* φ / b_j *:*

$$J_j[\varphi](x) = -\int\limits_{x}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{b_j(\xi)} d\xi.$$

From Theorem 1 we can obtain

Theorem 2. *Suppose that the function* $f(x)$ *in equation (1) is continuous and satisfies the condition*

$$|f(x)| \le Ce^{-\gamma x},\ C > 0,\ \gamma > 0, \tag{8}$$

all $a_0, \dots, a_{n-1}$ *are continuous functions satisfying (3), and* $p(x)$ *is a bounded continuous function.*

Then for any solution $y(x)$ *to equation (1) tending to zero as* $x \to \infty$ *, there exists a solution* $z(x)$ *to equation (2) such that*

$$|y(x) - z(x)| = O(e^{-\gamma x}), \quad x \to \infty. \tag{9}$$

Similarly, for any solution $z(x)$ *to equation (2) tending to zero as* $x \to \infty$*, there exists a solution* $y(x)$ *to equation (1) satisfying (9).*

Remark. *Note that a similar result is true for equation (1) with a power-law small right-hand side. (For the case* $a_j = 0$ *see[9].)*

The work is partially supported by RSF (Project 20-11-20272).

Refrences

1. Kiguradze I. T., Chanturia T. A., *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

2. Astashova I. V., *Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations.* In: Astashova I. V. (ed.) Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, M.: UNITY-DANA. 2012. 22–290. (Russian)

3. Astashova I. V., *Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations* // J. Math. Sci. (N. Y.), **126**:5. 2005. 1361–1391.

4. Kozlov V. A., *On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations* // Ark. Mat. 1999. **37**:2. 305–322.

5. Astashova I., *On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden-Fowler type higher-order equations* // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. 2013:220. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-220, 1-15.

6. Astashova I. V., Vasilev M. Y. *On nonpower-law asymptotic behavior of blow-up solutions to Emden–Fowler type higher-order differential equations* // Differential and Difference Equations with Applications. S. Pinelas et al. (eds.). 2020. Vol. 333 of Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer Cham. P. 361–372.

7. Astashova I. V., *On asymptotic equivalence of differential equations* // Differ. Uravn. **32**. 1996. 855. (Russian) English translation in Differ.Equations. **32**. 1996.

8. Astashova I. V., Filinovskii A. V., Kondratiev V. A., Muravei L. A., *Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations* // Journal of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London. **23**: 1–2. 2003. 1–126.

8. Astashova I. *On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations* // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63. P. 31-38.

10. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. *Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations* // Advances in Nonlinear Analysis. **11**(1). 2022. 1598–1613.

11. Egorov Yu. V., Kondratiev V. A., Oleinik O. A., *Asymptotic behavior of the solutions to nonlinear elliptic and parabolic systems in tube domains* // Mat. Sbornik. **189**:3. 1998. 45-68. (Russian)

12. Brower F., Wong J. S. W., *Asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations* // J. Diff. Equations. 1969. **6**. 527-543.

13. Svec M., *Asymptotic relationship between solutions of two systems of differential equations*// Czechoslovak Math. J. 29. 1974. P. 44–58.

14. Saito S., *Asymptotic equivalence of quasilinear ordinary differential systems* // Math. Japan. 37. 1992. 503-513.

15. Choi S. K., Goo Y. H., Koo N. J., *Asymptotic equivalence between two linear differential systems* // Ann. Differential Equations. 13. 1997. P. 44–52.

16. Zafer A., *On asymptotic equivalence of linear and quasilinear difference equations* // Appl. Anal. 2005 **84** (9). 899-908.

17. Pinto M., *Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant arguments* // Mathematical and Computer Modelling. 2009. **49**. 9–10. 1750–1758.

18. Reinfelds A., *Asymptotic equivalence of difference equations in Bahach Space* // Theory and Applications of Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. Springer. 2014. P. 215-222.

19. Samoilenko A., Stanzhytskyi O., *Qualitative and Asymptotic Analysis of Differential Equations with Random Perturbations* / World Scientific. **78**. 2011.

A FORMULA FOR THE CENTRAL EXPONENT OF DISCRETE TIME-VARYING SYSTEMS

Adam Czornik and Michał Niezabitowski

Since the famous work of A.M. Lyapunov [1], Lyapunov exponents entered the canon of dynamical systems theory and are, along with other numerical characteristics such as Bohl or Perron exponents, commonly used tools to describe properties of dynamical systems. One of the problems with numerical calculation of Lyapunov exponents of linear systems with variable coefficients is their discontinuity as a function of coefficients of the system. This property was already noticed by O. Perron in [2]. For this reason, many works in the literature concern the description of possible changes in the Lyapunov exponents under the influence of various kinds of parametric perturbations. A summary of this work for continuous-time systems can be found in the monograph [3], and for discrete-time systems in the monograph [4]. In particular, it was shown that the maximum upward shift of the largest Lyapunov exponent is described by the so-called central exponent (see [5]) and Theorem 1 below). The significance of this exponent for the theory of stability lies in the fact that its negativity implies, inter alia, the exponential stability of the perturbed system for all parametric perturbation tending to zero. However, this exponent is expressed by the transition matrix of the unperturbed system and therefore, in general, it is difficult to compute. Additionally, the central exponent itself is generally not a continuous function of the coefficients but only a semi-continuous function from above (see Chapter 4 in [3]).

On the other hand, for time-invariant systems, a comprehensive description of the dynamic properties can be obtained through the spectrum of the system matrix. This brings to mind an attempt to express the numerical characteristics of systems with variable coefficients through the eigenvalues of the matrix of coefficients. In the general case, it is unfortunately impossible, because there are examples of exponentially uniformly stable continuous systems, whose coefficient matrices have spectra lying in the right half-plane, as well as examples of unstable systems with coefficient matrices with only eigenvalues with a negative real part (see e.g. [6]

p. 257). There are also analogous examples for discrete systems. It turns out, however, that if the coefficients of the system change slowly enough, then from the location of the spectra of the coefficient matrix, certain properties concerning the asymptotic properties of solutions can be deduced. This is the basic idea behind the so-called 'freezing method' initiated by Desoer's work [7]. A summary of the results obtained using this technique can be found in Section 10.1 of [8].

In this work we deal with the relationship between the largest in absolute value eigenvalues of the coefficient matrix and central exponent of a discrete time-varying system. The main result of the work states that for systems with slowly varying coefficients (see Definition 1) the central exponent is the upper limit of arithmetic-mean of the logarithms of the largest module of eigenvalues of the coefficient matrix. Systems with slowly varying coefficients have been recently considered in [9] where formulae for the largest and smallest Bohl exponents were obtained. The work also contains a numerical example illustrating the obtained result.

Let $\|x\|$ be the Euclidean norm of $x \in \mathbb{R}^d$ and $\|C\|$ be the operator norm induced by Euclidean norm of a matrix $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$. A Lyapunov sequence is a sequence $C = (C(n))_{n\in\mathbb{N}}$ of invertible square matrices such that

$$\max\{\|C\|_\infty, \|C^{-1}\|_\infty\} < \infty,$$

where $\|C\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|C(n)\|$.

We will consider systems of the following form

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

where $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a Lyapunov sequence. Let us denote by $(\Phi_A(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ the transition matrix of system (1).

Definition 1. The Lyapunov exponent λ_A of system (1) is defined as follows

$$\lambda_A = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|\Phi_A(n,0)\|.$$

Consider now a perturbed system

$$z(n+1) = (A(n) + Q(n))\, z(n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

where the perturbation $Q = (Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence of d by d matrices such that $A + Q = (A(n) + Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ is a Lyapunov sequence. It is clear that for each Lyapunov sequence A there exists a $\delta_A > 0$ such that $A + Q$ is a Lyapunov sequence for each Q such that $\|Q\|_\infty < \delta_A$. Considering the perturbed system (2) we will always assume that Q is such that $\|Q\|_\infty < \delta_A$.

Consider the following two quantities

$$\Omega_1(A) = \lim_{q\to 0^+} \left(\sup_{\|Q\|_\infty < q} \lambda_{A+Q} \right),$$

$$\Omega_2(A) = \sup\left\{ \lambda_{A+Q} : \lim_{n\to\infty} Q(n) = 0 \right\}.$$

The quantity $\Omega_1(A)$ introduced for continuous-time systems by R. E. Vinograd in articles [10] and [11], in which he obtained an upper bound of $\Omega_1(A)$ in terms of the transition Cauchy matrix of the system. V. M. Millionshchikov proved in paper [12] that the upper bound obtained by R. E. Vinograd is sharp. The problem of calculating $\Omega_1(A)$ and $\Omega_2(A)$ for discrete-time systems was investigated in [5], where the following theorem has been proved.

Theorem 1. *The following equality holds*

$$\Omega_1(A) = \Omega_2(A) = \Omega_C(A),$$

where

$$\Omega_C(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \|\Phi_A(k+N,k)\| \right).$$

The number $\Omega_C(A)$ is called the central exponent of system (1).

The main objective of this paper is to provide a formula for $\Omega_C(A)$ in the terms of eigenvalues of matrices $A(n)$ under certain additional assumption about the sequence A. In the next theorem $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\lambda(C)$ is the greatest absolute value of the eigenvalues of matrix C.

Theorem 2. *If*

$$\lim_{n\to\infty} \|A(n+1) - A(n)\| = 0,$$

then

$$\Omega_C(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \lambda(A(i)).$$

Refrences

1. Lyapunov A.M. *The general problem of the stability of motion,* // Internat. J. Control. 1992. Vol. 55, № 3, P. 531–773.

2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme.* // Math. Z. 1930. Vol. 31, № 1, P. 748–766.

3. Izobov N. A. *Lyapunov Exponents and Stability*, Cambridge, Cambridge Scientific Publishers, 2012.

4. Czornik A. *Perturbation Theory for Lyapunov Exponents of Discrete Linear Systems*, Kraków, Wydawnictwo AGH, 2012.

5. A. Babiarz A., Barabanov E, Czornik A, Niezabitowski M. Vaidzelevich A. *On the influence of small perturbations on the senior Lyapunov exponent of the discrete time-varying system.* // IFAC-Papers On Line. 2017. Vol. 50(1). P. 7462–7466.

6. Hinrichsen D. and Prichard A. J. *Mathematical systems theory I.* Berlin, Springer-Verlag, 2005.

7. Desoer C. *Slowly varying discrete system* $x_{i+1} = A_i x_i$. // Electronics Letters. 1970. Vol. 6. № 11. P. 339–340.

8. Gil M.I. *Difference Equations in Normed Spaces. Stability and Oscillations.* North-Holland Mathematics Studies, Vol. 206. Amsterdam, Elsevier, 2007.

9. Czornik A., Simek K. *A formula for the lower Bohl exponent of discrete time-varying systems,* acepted for publication in Archives of Control Sciences.

10. Vinograd R. *Estimate of the jump of a characteristic exponents for small perturbations.* // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1957. Vol. 114. № 3. P. 459–461.

11. Vinograd R. *On the central characteristic exponent of a system of differential equations.* // Mat. Sb. 1957. Vol. 42, № 2. P. 207–222.

12. Millionshchikov, V. (1969). A proof of the attainability of the central exponents of linear systems. Sibirskij Matematicheskij Zhurnal (Siberian Mathematical Journal), 1969. Vol. 10. № 1, 99–104 (69–73).

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ИЗОХРОННЫХ ФОКУСАХ ДВУМЕРНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.В. Амелькин, В.Ю. Тыщенко

Рассмотрим вещественную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y + P(x,y), \quad \dot{y} = x + Q(x,y), \tag{1}$$

где P и Q – голоморфные в окрестности G начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости xOy функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды линейных и свободных членов.

Как хорошо известно, начало координат $O(0,0)$, как изолированная особая точка системы (1), является либо центром, либо негрубым фокусом.

В работе [1] центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) назван *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$.

Луч OA из приведённого определения изохронности назван в [2] *лучом-изохроной*.

В работе [3] дано определение изохронного сечения, обобщающее понятие луча-изохроны. Приведем это определение, слегка его модифицируя.

Именно, обозначим для каждого $z \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ через $\psi(t,z)$ траекторию центра или фокуса $O(0,0)$ системы (1) такую, что $\psi(0,z) = z$ и пусть $\eta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ – аналитическая кривая, трансверсальная векторному полю, определяемому правой частью системы (1), такая, что $\eta(0) = O(0,0), \eta'(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Кривую η назовем *изохронным сечением* системы (1) в точке $O(0,0)$, если:

i) для любого $z \in \eta$ имеет место включение $\psi(2\pi, z) \in \eta$;

ii) $\psi(t,z) \notin \eta$ для всех $t \in (0, 2\pi)$.

Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется *изохронным*, а саму систему (1) называют *изохронной*, если она имеет в точке $O(0,0)$ изохронное сечение.

Основные методы, используемые для изучения изохронных монодромных особых точек голоморфных дифференциальных систем вида (1) могут быть грубо классифицированы на две категории: метод нормальных форм и метод коммутирующих дифференциальных систем.

Одной из нормальных форм является нормальная форма, которая следует из нормальной формы Пуанкаре-Дюлака. Именно, имеет место определение [4, с. 98; 5, с. 242-249]: *дифференциальная система* (1) *называется изохронной, если существует в некоторой окрестности* $G^* \subseteq G$ *точки* $O(0,0)$ *обратимое формальное, вообще говоря, преобразование вида*

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j, \tag{2}$$

переводящее (1) в систему

$$\dot{u} = -v + u\Phi(u^2+v^2), \quad \dot{v} = u + v\Phi(u^2+v^2) \tag{3}$$

где $\Phi(w) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \delta_j w^j$.

Отметим, что в случае центра $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi(w) \equiv 0$) преобразование (2) является сходящимся. В случае фокуса $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi(w) \not\equiv 0$), вообще говоря, нельзя гарантировать существование сходящейся замены переменных (2) [5, с. 242-249].

Основополагающим утверждением в методе коммутирующих дифференциальных систем, касающимся изохронного центра системы (1), является теорема 1 работы Н. Н. Ладиса [6]: *для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений* (1) *имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная в окрестности точки* $O(0,0)$ *система*

$$\dot{x} = x + M(x,y), \quad \dot{y} = y + N(x,y),$$

где M *и* N *не содержат линейных и свободных членов, коммутирующая с* (1).

Отметим, что после опубликования работы [6] были получены некоторые частные результаты об изохронных центрах системы (1). И только спустя 24 года, теорема Н. Н. Ладиса была сформулирована и передоказана в работе [7, теорема 2.3].

Поскольку в нормальной форме (3) в случае фокуса $O(0,0)$ системы (1) ряды (2), вообще говоря, расходятся, то естественно получить необходимые и достаточные условия, при выполнении которых ряды (2) являются сходящимися.

Дальнейшие исследования голоморфной системы (1) основываются на определении изохронного фокуса $O(0,0)$ с точки зрения наличия у особой точки $O(0,0)$ аналитических изохронных сечений и равносильного (как будет показано ниже) этому определению определения с точки зрения приведения системы (1) к специальной нормальной форме.

Определение. Будем говорить, что особая точка $O(0,0)$ системы (1) является *изохронным фокусом*, если существует в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0,0)$ биголоморфизм вида (1), переводящий (1) в голоморфную систему (3), где $\Phi(w) \not\equiv 0$.

Теорема. *Для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений* (1) *имела в особой точке* $O(0,0)$ *изохронный фокус, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны следующие утверждения:*

1) существует голоморфная в окрестности $G^* \subseteq G$ *начала координат* $O(0,0)$ *система*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x + X(x,y))\Phi((x+\alpha(x,y))^2 + (y+\beta(x,y))^2),\\ \dot{y} &= (y + Y(x,y))\Phi((x+\alpha(x,y))^2 + (y+\beta(x,y))^2),\end{aligned}$$

коммутирующая с системой (1)*, где* $\Phi(w) \not\equiv 0, \alpha(x,y) \equiv \sum\limits_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij}x^iy^j, \beta(x,y) \equiv$
$\equiv \sum\limits_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij}x^iy^j;$

2) существует в окрестности $G^* \subseteq G$ *точки* $O(0,0)$ *биголоморфизм*

$$u = x + \alpha(x,y), \quad v = y + \beta(x,y),$$

переводящий систему (1) *в систему* (3)*, где* $\Phi(w) \not\equiv 0;$

3) существует бесконечно много изохронных сечений в особой точке $O(0,0)$ *системы* (1)*, определяемых, вообще говоря, в неявном виде соотношением*

$$y\cos\theta = x\sin\theta + \alpha(x,y)\sin\theta - \beta(x,y)\cos\theta, \quad \text{где } \theta \in [0, 2\pi).$$

Литература

1. Абдуллаев Н. *Об изохронности при нелинейных колебаниях* // Тр. Тадж. учительского ин-та им. С. С. Айни. 1954. Вып. 2. С. 71–78.

2. Амелькин В. В. *Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.

3. Sabatini M. *Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems* // Ann. di Matem. 2003. V. 182. № 4. P. 487–501.

4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982.

5. Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике.* М., ИЛ, 1959.

6. Ладис Н. Н. *Коммутирующие векторные поля и изохронность* // Вестник Бел. гос. ун-та им. В. И. Ленина. 1976. Сер. 1. № 1. С. 21–24.

7. Algaba A., Freire E., Gamero E. *Isochronicity via normal form* // Qual. Theory Dyn. Syst. 2000. V. 1. № 5. P. 133–156.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Метод отражающей функции Мироненко является современным инструментом, который успешно применяется для качественного исследования дифференциальных уравнений. Разработаны методы, позволяющие строить отражающую функцию даже для тех уравнений, которые не интегрируются в квадратурах. К таким дифференциальным уравнениям относится и уравнение Риккати, которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах. Интерес к уравнениям Риккати вызван тем, что их решения играют важную роль в различных областях физики, а также для некоторых задач оптимального управления.

Если уравнение Риккати имеет линейную отражающую функцию, то, согласно [1], старший коэффициент уравнения равен $b(t)e^{\beta(t)}$, где $b(t)$, $\beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. При этом мы полагаем, что $b(t)$ может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + B(t)x + C(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $B(t)$, $C(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Наряду с уравнением Риккати рассмотрим линейную по фазовой переменной x функцию

$$F(t,x) = f(t) + g(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(t)$, $g(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем условия на коэффициенты $B(t)$, $C(t)$, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнения Риккати (1) имело линейную отражающую функцию вида (2).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (2) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$. *Для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную по фазовой переменной* *отражающую функцию, определенную на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. *функция* $\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)$ *доопределяется до дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функции* $f(t)$*, которая обращается в нуль при* $t=0$*;*
2. *имеют место равенства*

$$\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)\Big(-\tfrac{2\dot b(t)}{b(t)}+B(-t)-B(t)\Big)+2\Big(2\ddot\beta(t)+\dot B(t)-\dot B(-t)\Big)+$$
$$+4b(t)\left(e^{\beta(t)}C(t)+e^{-\beta(t)}C(-t)\right)=0,\quad t\in\mathbb{R},$$

и

$$\dot\beta(0)+B(0)=0.$$

Тогда линейная отражающая функция (2) имеет вид

$$F(t,x)=\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)+e^{2\beta(t)}x.$$

Под периодом определенной на всей числовой оси функции $a(t)$ будем понимать такое действительное число $T>0$, что для всех значений переменной выполняется равенство $a(t+T)=a(t)$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $b(t)$, $\beta(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *уравнения Риккати (1) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$ *и являются* 2ω*-периодическими. Если отражающая функция уравнения (1) линейная, то все его решения будут* 2ω*-периодическими.*

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\dot x=x^2\sin t+x\left(e^{\cos t}\sin 2t+\sin t\sin 3t\right)+\frac{\sin 4t}{1+\cos^2 3t}+\frac{1}{2}e^{\cos t}\sin 2t\sin 3t-\frac{3}{2}\cos 3t,$$

коэффициенты которого являются 2π-периодическими, а отражающая функция является линейной и имеет вид $F(t,x)=x+\sin 3t$. Отметим, что основным периодом отражающей функции является число $\frac{2\pi}{3}$, однако число 2π также является ее периодом. Поэтому по теореме 2 все решения этого уравнения будут 2π-периодическими.

Доказательства приведенных выше теорем можно найти в [2].

Литература

1. Белокурский М. С. *Почти периодические решения почти периодического уравнения Абеля с линейной отражающей функцией* // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 4 (45). С. 88 – 90.

2. Белокурский М. С. *Периодические и почти периодические решения уравнений Риккати с линейной отражающей функцией* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 5. С. 479–488. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА В СЛУЧАЕ СЛАБОГО ВЫРОЖДЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

А.Н. Бондарев

Для матричного дифференциального уравнения Ляпунова типа [1]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C_1(t)XC_2(t) + B_1(t)XB_2(t) + F(t) \equiv G(t, X) \qquad (1)$$

изучается краевая задача с условием

$$\sum_{s=1}^{k} M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \qquad (2)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_1, B_2, C_1, C_2, F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_s – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $I = [0, \omega]$.

На основе применения конструктивного метода регуляризации [2] эта задача исследуется в банаховом пространстве $C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц, например любая из норм, приведённых в [3, с. 21]. Данная работа является развитием [1] и обобщением [4, 5].

Исследуется случай слабого вырождения краевых условий [1]

$$\sum_{s=1}^{i} M_s = 0, \qquad (3)$$

где число i фиксировано и может принимать любое значение от 2 до k.

Обозначения:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \int_{t_j}^{t_i} A(\tau)d\tau - \sum_{r=i+1}^{k} M_r\,, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|\,, \quad \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|\,, \quad h = \max_{t\in I}\|F(t)\|\,,$$

$$\beta_l = \max_{t\in I}\|B_l(t)\|\,, \quad \delta_l = \max_{t\in I}\|C_l(t)\| \ (l = 1, 2)\,, \quad m_s = \|M_s\| \ (s = \overline{1, k})\,,$$

$$\tilde{m}_1 = \sum_{j=1}^{i-1} m_j\,, \quad \tilde{m}_2 = \sum_{r=i+1}^{k} m_r\,, \quad \varepsilon = \alpha + \delta_1\delta_2 + \beta_1\beta_2\,,$$

$$q = \gamma \sum_{j=1}^{i-1} m_j \left\{ \frac{1}{2}\alpha\varepsilon[(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2] + (\varepsilon - \alpha)(t_i - t_j) \right\} + \\ + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon\tilde{m}_1[(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \gamma\varepsilon\tilde{m}_2(t_k - t_1)\,,$$

$$N = \gamma h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2}\alpha m_j[(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2 + (t_i - t_j)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\alpha\tilde{m}_1[(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \tilde{m}_2(t_k - t_1) \right\}.$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det\Phi \neq 0$, $q < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима, при этом для её решения* $X = X(t)$ *справедлива оценка*

$$\|X\|_C \leqslant \frac{N}{1 - q}. \qquad (4)$$

С помощью методики, используемой в [1], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t) = \Phi^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j\left[\int\limits_{t_j}^{t}\left(\int\limits_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X(\tau))d\tau - \int\limits_{t}^{t_i}\left(\int\limits_{\tau}^{t_i} A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X(\tau))d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{t_j}^{t_i}(G(\tau,X(\tau)) - A(\tau)X(\tau))d\tau\right] - \sum_{r=i+1}^{k} M_r\int\limits_{t_r}^{t} G(\tau,X(\tau))d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Для изучения разрешимости уравнения (5) используется принцип сжимающих отображений (см., например, [6, с. 605]). Согласно этому принципу, на основании условий теоремы, решение уравнения (5) существует и единственно в пространстве $C(I,\mathbb{R}^{n\times m})$. Для получения соотношения (4) выполнены оценки по норме в уравнении (5).

Решение уравнения (5) строится классическим методом последовательных приближений типа [6, с. 605]. Соответствующий алгоритм имеет вид

$$X_p(t) = \Phi^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j\left[\int\limits_{t_j}^{t}\left(\int\limits_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X_{p-1}(\tau))d\tau - \right.\right.$$

$$- \int\limits_{t}^{t_i}\left(\int\limits_{\tau}^{t_i} A(\sigma)d\sigma\right)G(\tau,X_{p-1}(\tau))d\tau -$$

$$\left.\left. - \int\limits_{t_j}^{t_i}(G(\tau,X_{p-1}(\tau)) - A(\tau)X_{p-1}(\tau))d\tau\right] - \sum_{r=i+1}^{k} M_r\int\limits_{t_r}^{t} G(\tau,X_{p-1}(\tau))d\tau\right\}, \quad p = 1,2,\ldots, \qquad (6)$$

где X_0 – произвольная функция класса $C(I,\mathbb{R}^{n\times m})$.

Доказано, что последовательность $\{X_r\}_0^\infty$, определяемая алгоритмом (6), сходится равномерно по $t\in I$ к решению интегрального уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leqslant \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0,1,2,\ldots$$

Оценка области локализации решения $X(t)$, определяемая на основе алгоритма (6), имеет вид

$$\|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \qquad (7)$$

Из (7) при $X_0\equiv 0$ получено соотношение, из которого следует оценка (4).

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Бондарев А. Н. *Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова* // Актуальные проблемы науки и техники: материалы II Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию ИМИ – ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М. Т. Калашникова". 2022. С. 11–16.

5. Бондарев А. Н. *Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. 2022. С. 46–49.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Е.З. Боревич

Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} E'' + E'E = fH(E, E_0), \quad 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0, \quad E_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f – положительная константа, $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$, а функция $G(E)$ класса C^2 удовлетворяет условиям:

1) функция $G(E)$ при $E > 0$ имеет ровно две точки экстремума: E_1 – локальный максимум, E_2 – локальный минимум, причем $E_1 < E_2$ и $G(0) \le G(E_2)$;

2) $G'(E) > 0$ при $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$, $\quad G'(E) < 0$ при $E \in (E_1, E_2)$.

Утверждение 1. 1) если $E_1 < E_0 < E_2$, то уравнение $H(E, E_0) = 0$ имеет ровно три положительных решения $0 < E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$, причем $H'_E(E_i(E_0), E_0) > 0, \quad i = 1, 2$;

2) существует единственное E_0^* такое, что

$$\int\limits_{E_1(E_0^*)}^{E} H(s, E_0^*) ds \quad \begin{cases} >0 \quad if \quad E \in (E_1(E_0^*), E_2(E_0^*)), \\ =0 \quad if \quad E = E_2(E_0^*). \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < E_0 \le E_1$ или $E_0 \ge E_2$, то задача (1) имеет только тривиальное решение $E(x) = E_0$. Если $E_0 \in (E_1, E_2)$, то задача (1) имеет бифуркационные решения при любом $f > f_k$, где $f_k = -H'(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, ...$ [1].

Представляет интерес асимптотическое поведение бифуркационных решений при больших значениях параметра f. Запишем задачу (1) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon E'' + \varepsilon E'E = H(E, E_0), \\ E(0) = E(1) = E_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon = f^{-1}$.

Решения $E_k^{\nu}(x, \varepsilon)$, $\nu = +, -$ задачи (2), определенные при $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = f_k^{-1}$ будем называть собственными функциями задачи (2).

Теорема 1. 1) Пусть $E_0 \in (E_1, E_0^*)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_1^-, \quad E_k^{\pm}, \quad k = 2, 3, ...$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^- = E_1(E_0)$ равномерно на каждом компакте из $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^{\pm} = E_1(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$;

2) Пусть $E_0 \in (E_0^*, E_2)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений E_1^+ , $E_k^\pm$, $k = 2, 3, \dots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^+ = E_2(E_0)$ равномерно на каждом компакте $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^\pm = E_2(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$.

Асимптотика собственных функций задачи (2) резко меняется, если $E_0 = E_0^*$. В этом случае семейства решений обладают переходными точками [2].

Теорема 2. Пусть $E_0 = E_0^*$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_k^\pm$, $k = 1, 2, \dots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что каждое семейство $E_k^\pm$ имеет на интервале $(0, 1)$ ровно k переходных точек.

Литература

1. Grandall M.G., Rabinowitz P.H. *Bifurcation from simple eigenvalues* // J. Funct. Anal. 1971. Vol.8. P. 321–340.

2. Fife P.C. *Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations* // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 54. P. 497–521.

ОПИСАНИЕ ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА ЦЕНТРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассмотрим полиномиальную систему Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x),\, \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x),\, t \in \mathbb{R},\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F(x)$, $\tilde{g}(x)$ – вещественные полиномы,

$$F(x) = f_n x^n + \dots + f_{n'} x^{n'} \; (n' \leq n,\, n' \geqslant 1),$$

$$G(x) = \int\limits_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau = g_m x^m + \dots g_{m'} x^{m'} \; (m' \leq m,\, m' \geqslant 2).$$

Здесь $n = \overline{deg} F$ и $m = \overline{deg} G$ — верхние степени полиномов F и G соответственно, $n' = \underline{deg} F$ и $m' = \underline{deg} G$ — их нижние степени. Из определения степеней следуют неравенства $f_n \neq 0$, $f_{n'} \neq 0$, $g_n \neq 0$, $g_{n'} \neq 0$, $n \geq n' \geq 1$, $m \geq m' \geq 2$. Предполагается также, что особая точка (0,0) системы (1) удовлетворяет условиям монодромности

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+ = (2, 4, \dots),\, n' \geq \frac{m'}{2},\, 8 g_{m'} > f^2_{\frac{m'}{2}}.$$

Согласно [1,2] существование композиции вида

$$F = B(A),\, G = C(A),\, \underline{deg} A \in 2\mathbb{Z}^+, \tag{2}$$

где A , B , C — вещественные полиномы, является необходимым и достаточным условием центра для системы (1) в особой точке (0,0).

Соотношения (2) можно интерпретировать как параметрическое представление центров в пространстве пар полиномов (F,G). С целью описания прямых непараметрических условий центра в работе [3] рассматривалась задача исключения полиномов

$$A(x)=a_kx^k+...+a_{k'}x^{k'},\ B(x)=b_lx^l+...+b_{l'}x^{l'},\ C(x)=c_sx^s+...+c_{s'}x^{s'}$$

из условий (2).

Несколько модифицируя подход из [3], перейдём к проективным координатам

$$\hat f=(\hat f_n,\hat f_{n-1},...,\hat f_{n'}),\ \hat g=(\hat g_m,\hat g_{m-1},...,\hat g_{m'})$$

для полиномов F, G. Здесь $\hat f_n=1$, $\hat f_i=\dfrac{f_i}{f_n}$, $i\in\{n-1,...,n'\}$, $\hat g_m=1$, $\hat g_i=\dfrac{g_m}{g_i}$, $i\in\{m-1,...,m'\}$.

Следуя [3], определим множество $P(n,n',m,m')=\{(k,k'):k'\in 2\mathbb{Z}^+,\,k\geq k',\,k|(n,m),\,k'|(n',m'),\,\dfrac{n}{k}\geq\dfrac{n'}{k'},\,\dfrac{m}{k}\geq\dfrac{m'}{k'}\}$, где условие $k|(n,m)$ означает, что $k>1$ и k делит n и m. Отметим, что, если $P(n,n',m,m')$ — пустое множество, то монодромная особая точка (0,0) системы (1) является фокусом.

Пусть $a_k=1$, тогда в [3] доказывается, что коэффициенты полиномов $B(A)=\varphi^B_{kl}(a,b)x^{kl}+...+\varphi^B_{k'l'}(a,b)x^{k'l'}$, $C(A)=\varphi^C_{ks}(a,c)x^{ks}+...+\varphi^C_{k's'}(a,c)x^{k's'}$ имеют вид $\varphi^B_{kl}(a,b)=b_l$,
$\varphi^B_{kl-1}(a,b)=lb_la_{k-1},\ \varphi^B_{kl-i}(a,b)=lb_la_{k-i}+\tilde\varphi^B_{kl-i}(b_l,a_{k-1},...,a_{k-i+1})\,\forall i\in\{2,...,k-k'\}$,
$\varphi^B_{k(l-j)}(a,b)=b_{l-j}+\tilde\varphi^B_{k(l-j)}(b_l,...,b_{l-j+1},a)\,\forall j\in\{1,...,l-l'\}$,
$\varphi^C_{ks}(a,c)=c_s,\ \varphi^C_{ks-1}(a,c)=sc_sa_{k-1},\ \varphi^C_{ks-i}(a,c)=sc_sa_{k-i}+\tilde\varphi^C_{ks-i}(c_s,a_{k-1},...,a_{k-i+1})$
$\forall i\in\{2,...,k-k'\}$,
$\varphi^C_{k(s-j)}(a,c)=c_{s-j}+\tilde\varphi^C_{k(s-j)}(c_s,...,c_{s-j+1},a)\,\forall j\in\{1,...,s-s'\}$.

Теорема. *Для наличия центра в монодромной особой точке (0,0) системы Льенара (1) необходимо и достаточно существования пары $(k,k')\in P(n,n',m,m')$, для которой выполняются условия*

$$\varphi^B_{kl-i}(\alpha_F(\hat f),\,\beta_F(\hat f))=\hat f_{n-i},\ \forall i\in\{k-k'+1,...,n-n'\}\backslash\{k,2k,...,kl'\},\tag{3}$$

$$\varphi^C_{ks-i}(\alpha_G(\hat g),\ \beta_G(\hat g))=\hat g_{m-i}\,\forall i\in\{k-k'+1,...,m-m'\}\backslash\{k,2k,...,ks'\},\tag{4}$$

$$\alpha_F(\hat f)=\alpha_G(\hat g),\tag{5}$$

где компоненты вектора $a=\alpha_F(\hat f)$ определяются рекурсией

$$a_k=1,\ a_{k-i}=\frac{k_{n-i}}{n}\hat f-\tilde\varphi^B_{kl-i}(\hat f_n,a_k,a_{k-1},...,a_{k-i+1})\,\forall i\in\{1,...,k-k'\},$$

компоненты вектора $a=\alpha_G(\hat g)$ определяются рекурсией

$$a_k=1,\ a_{k-i}=\frac{k}{m}\hat g_{m-i}-\tilde\varphi^C_{ks-i}(\hat g_m,a_k,a_{k-1},...,a_{k-i+1})\,\forall i\in\{1,...,k-k'\},$$

компоненты вектора $b=\beta_F(\hat f)$ определяются рекурсией

$$b_l=\hat f_n=1,\ b_{l-j}=\hat f_{n-kj}-\tilde\varphi^B_{k(l-j)}(b_l,...,b_{l-j+1},a)\,\forall j\in\{1,...,l-l'\},$$

компоненты вектора $c = \beta_G(\hat{g})$ *определяются рекурсией*

$$c_s = \hat{g}_m = 1,\, c_{s-j} = \hat{g}_{m-kj} - \tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s, ..., c_{s-j+1}, a)\, \forall j \in \{1, ..., s - s'\}.$$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^N = \{(\hat{f}, \hat{g})\}\, (N = n - n' + m - m')$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$. Обозначим через $Q_{(k,k')}$ множество векторов $\{(\hat{f}, \hat{g})\}$, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5).

Следствие. Полуалгебраическое множество $Q(n, n', m, m') \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$, для которых системы Льенара (1) имеют центр в монодромной особой точке (0,0), задаётся формулой

$$Q(n, n', m, m') = \bigcup_{(k,k') \in P(n,n',m,m')} Q_{(k,k')}.$$

Литература

1. Черкас Л.А. *Степень негрубости фокуса в уравнении Льенара.* // Доклады Академии наук БССР. 1979. Т.23. №8. С. 681 - 683.

2. Chritopher C. *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems.* // Jornal of Mathematical Analysis and Applicatin. 1999. V.229 P. 319-329.

3. Борухов В. Т. *Алгебраический критерий существования центра в монодромной особой точке полиномиальной системы Льенара.* // Дифференц. уравнения. 2022. Т.58. №8. № 1. С. 1020–1031.

О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕХ СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ЦЕНТРОВ

М.Н. Василевич

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где P и Q – голоморфные в окрестности $O(0, 0)$ функции, начинающиеся со степеней 2 и выше. Предполагаем, что $O(0, 0)$ – изохронный центр системы (1). Он называется сильно изохронным относительно оси Ox, если любая траектория системы (1), пересекающая ось Ox при значении $t = t_0$ вновь пересекает ее при значении $t = t_0 + \pi$.

Теорема 1 [1]. *Для того чтобы система (1) была сильно изохронной относительно оси Ox, необходимо и достаточно, чтобы существовала замена*

$$u = x + U(x, y), \qquad v = y,$$

где U *– голоморфная в окрестности* $O(0, 0)$ *функция, начинающаяся со степеней 2 и выше, переводящая систему (1) в систему вида*

$$\frac{du}{dt} = -v + uF(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = u + vF(u, v).$$

Будем говорить, что сильно изохронный относительно Ox центр имеет изохронность четвертого порядка, если он также сильно изохронный относительно оси Oy. Если

$O_1(x_1, y_1)$ – другая особая точка системы (1), причем центр, то будем называть его сильно изохронным четвёртого порядка, если он сильно изохронный относительно прямых $x = x_1$ и $y = y_1$.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^2 + bxy + Ay^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{2}$$

Поставим задачу: построить систему вида (2), имеющую три центра, причем сильно изохронных четвертого порядка.

Теорема 2. *Система*

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{1}{3}(-5+3a)\,xy - \frac{2(-3+a)(-13+3a)\,x^2y}{9(-4+a)},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \frac{2(-13+3a)\,x\,(2x^2+27y^2-9ay^2)}{27(-4+a)} + \frac{1}{3}\left(-4x^2+3y^2+3ay^2\right) \tag{3}$$

имеет три центра сильно изохронных четвертого порядка. Координаты этих центров:

$$O(0,0), \quad A\left(\frac{9\sqrt{-4+a}}{2\left(\sqrt{3}+3\sqrt{-4+a}\right)},\ 0\right), \quad B\left(-\frac{9\sqrt{-4+a}}{2\left(\sqrt{3}-3\sqrt{-4+a}\right)},\ 0\right).$$

Ниже на рис. 1 представлены траектории системы (3) при значении $a = 7$. На рис. 2 изображены четверти траектории системы (3) на отрезках времени $t \in (0, \pi/2]$, $t \in$ $\in (\pi/2, \pi]$, $t \in (\pi, 3/2\,\pi]$, $t \in (3/2\,\pi, 2\pi]$. Изображающие точки начинают свое движение с оси Ox одновременно. Графики выполнены системой компьютерной алгебры “Mathematica”.

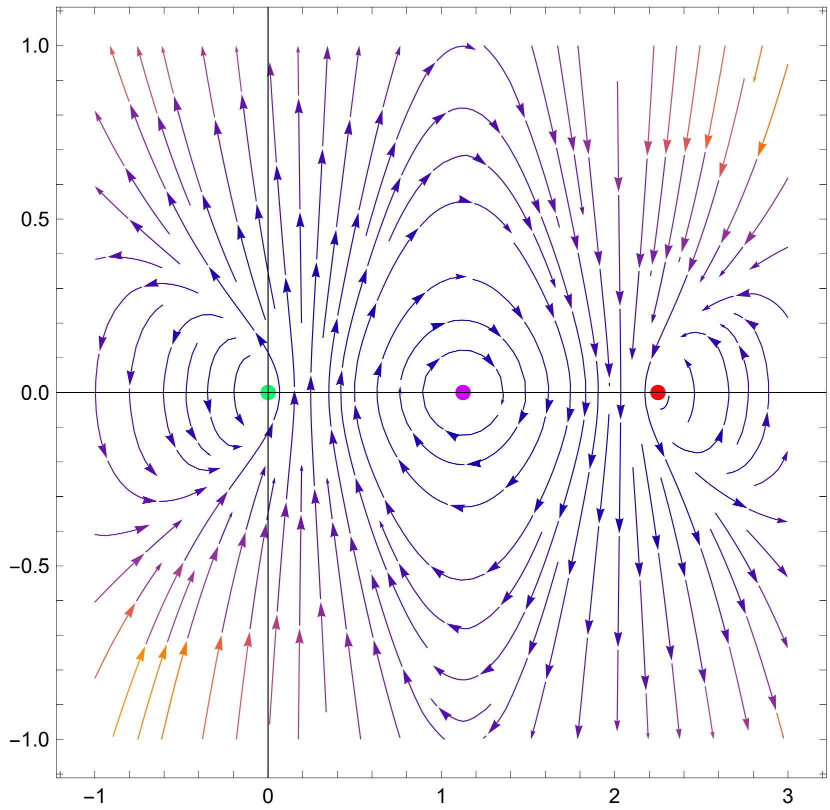


Рис. 1. Траектории системы 2

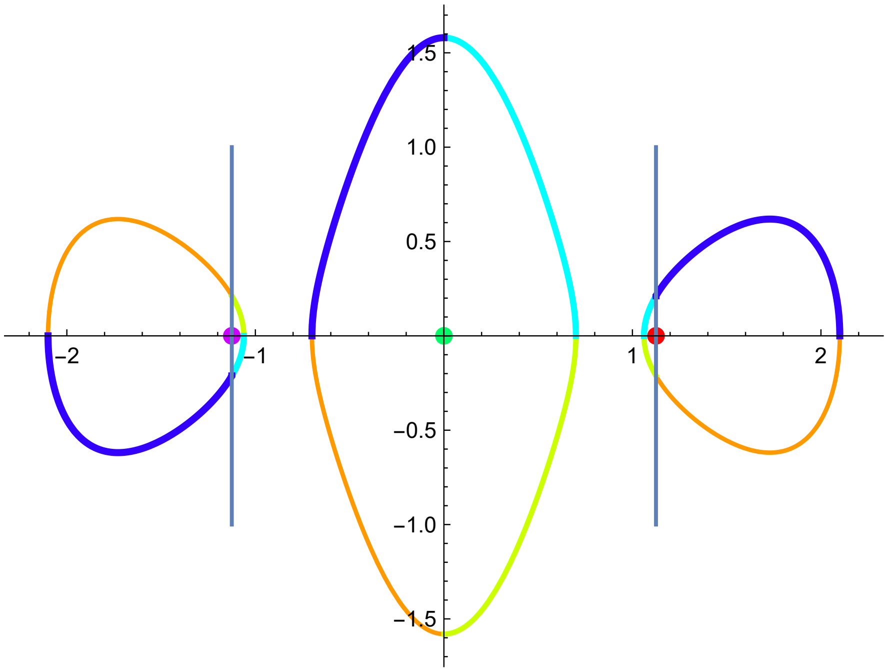


Рис. 2. Траектории системы 2 на временных отрезках длиной $t = \pi/2$

Литература

1. Руденок А. Е. *Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.

О РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ АНТИСЕДЛАМИ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И СЕДЛОМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

А.А. Гринь, А.В. Кузьмич

Рассматривается вещественная автономная квадратичная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy \equiv P(x,y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^i \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

к которой с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени может быть сведена произвольная квадратичная система.

Система (1) на вещественной фазовой плоскости может иметь только предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку – фокус, а всего она имеет не более двух фокусов [1]. Отсюда следует, что если система (1) имеет предельные циклы, то возможны их следующие распределения на фазовой плоскости: 1) $n, n > 0$, 2) (n_1, n_2) , $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1 + n_2 > 0$.

В работах [2,3] Л.А. Черкасом с помощью комбинированного применения системы прогноза Смейла и признака Дюлака был получен набор квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов и конфигурациями особых точек.

Целью настоящей работы является развитие и дополнение результатов работ [2,3] за счет изучения распределений предельных циклов двухпараметрических семейств квадратичных систем (1) с конфигурациями особых точек вида $F + A + S_\infty$, т.е систем, имеющих две особые точки – фокус в точке $(1, -1)$ и антиседло в точке $(x_0, -1/x_0), x_0 < 0$ в конечной части плоскости и одно седло в бесконечности.

Для нескольких случаев двухпараметрических семейств вещественных автономных квадратичных систем (1) с указанной конфигурацией особых точек на плоскости рассматриваемых параметров найдены области с одинаковыми распределениями предельных циклов. Идея исследования основана на комбинированном применении системы прогноза Смейла и признака Дюлака– Черкаса [2,3]. Сначала каждая из изучаемых квадратичных систем преобразуется в систему Льенара, для которой в плоскости рассматриваемых параметров определяются области с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла, что затем подтверждается при помощи построения функций Дюлака–Черкаса. Построение квазиполиномиальных функций Дюлака–Черкаса сводится к решению сеточной задачи линейного программирования и является очень трудоемким процессом поскольку для каждой из областей с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла подбор этих функций подходящей структуры, сеток оптимизации и других элементов задачи линейного программирования проводится индивидуально. Однако такой подход позволяет исключить появление кратных предельных циклов и решить 16-ю проблему Гильберта для рассмотренных двухпараметрических семейств квадратичных систем, что невозможно достичь другими известными методами. В итоге исследования получен следующий основной результат

Теорема. *Система (1) при* $a_{02} = 14/13, a_{20} = -40$ *в полосе* $\{(a_{01}, a_{11}) \in W,\ W : -37.08 \le a_{01} \le 36.001, -6.07 \le a_{11} \le 6.07\}$*, плоскости параметров имеет области со следующими распределениями предельных циклов* $(0, 0), (0, 1), (0, 1), (1, 1), (2; 0), (1, 2), (1, 3)$ *на фазовой плоскости.*

Опыт применения нашего подхода дает уверенность в его эффективности для решения проблемы предельных циклов и в других случаях параметрических семейств полиномиальных систем.

Подробное изложение полученных результатов для системы (1) с указанной конфигурацией особых точек представлено в статьях [4, 5].

Литература

1. Reyn J. *Phase portraits of planar quadratic systems* // Mathematics and Its Applications. 2007. V. 593.

2. Черкас Л. А. *Квадратичные системы с максимальным числом предельных циклов.* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1409–1419.

3. Черкас Л. А. *Об оценке числа предельных циклов квадратичной системы* // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 628–639.

4. Гринь А. А. *Распределения предельных циклов квадратичных систем с двумя антиседлами на фазовой плоскости и седлом в бесконечности* // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2021. Т. 11. № 2. С. 37–46.

5. Гринь А. А., Кузьмич А. В., Сидоренко И. Н. *Распределения предельных циклов квадратичных систем фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности* // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2022. Т. 12. № 1. С. 6–15.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В.А. Денисюк

Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = g(t, z_n) - \frac{n-1}{\tau_1} \frac{z_1}{1+\rho_1(n-1)^{-\gamma_1}} + \frac{n-1}{\tau_2} \frac{z_2}{1+\rho_2(n-1)^{-\gamma_2}}, \qquad t > 0, \\ \frac{dz_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} \frac{z_{j-1}}{1+\rho_{j-1}(n-1)^{-\gamma_{j-1}}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right) \frac{z_j}{1+\rho_j(n-1)^{-\gamma_j}} + \frac{n-1}{\tau_2} \frac{z_{j+1}}{1+\rho_{j+1}(n-1)^{-\gamma_{j+1}}}, \\ \quad j = 2, \dots, n-2, \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1} \frac{z_{n-2}}{1+\rho_{n-2}(n-1)^{-\gamma_{n-2}}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right) \frac{z_{n-1}}{1+\rho_{n-1}(n-1)^{-\gamma_{n-1}}}, \\ \frac{dz_n}{dt} = -\theta z_n + \frac{n-1}{\tau_1} \frac{z_{n-1}}{1+\rho_{n-1}(n-1)^{-\gamma_{n-1}}}, \\ z|_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\theta > 0$, $0 \le \rho_j < \rho$, $\gamma_j > \gamma > 1$, $\tau_2 > \tau_1 > 0$, функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}^2_+)$ является ограниченной и липшицевой по второму аргументу. Системы такого вида возникают при исследовании многостадийного синтеза вещества (см., например, [1]), при этом $z_n(t)$ описывает концентрацию конечного продукта. Поскольку количество стадий n может быть очень большим, то при нахождении $z_n(t)$ возникает проблема “большой размерности”. Эта проблема была решена Г. В. Демиденко в [2] для системы следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g(t, x_n) - \frac{n-1}{\tau} x_1, \qquad t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} x_{j-1} - \frac{n-1}{\tau} x_j, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = -\theta x_n + \frac{n-1}{\tau} x_{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что система (1) переходит в систему (2) при $\rho_j = 0$ и $\tau_2 \to \infty$. В [2] было доказано, что при достаточно больших n последняя компонента решения системы (2) приближенно описывается функцией $y(t)$, которая является решением уравнения с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(t-\tau, y(t-\tau)), \tag{3}$$

притом была получена оценка для $||x_t(t) - y(t)||$, при $n >> 1$.

В [3] исследовалась задача Коши вида (1) при нулевых начальных данных. В данной работе мы изучаем задачу Коши (1) при ненулевых данных. Будем неограниченно увеличивать число уравнений n и, решая каждую из задач Коши, составим последовательность из последних компонент решений $\{z_n^n(t)\}$. Доказано, что эта последовательность сходится к функции $y(t)$, которая является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием (3), где $\tau = \frac{\tau_2\tau_1}{\tau_2-\tau_1}$. Структура начальных данных для (3) зависит от структуры начального вектора z_0. Доказательство опирается на метод, предложенный Г. В. Демиденко (см., например, [2, 4]) и развитый в [3] для нелинейных систем вида (1).

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Литература

1. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. *Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.

2. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1. С. 73–94.

3. Матвеева И. И., Мельник И. А. *О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 2. С. 312–324.

4. Демиденко Г. В. *Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 6. С. 1274–1282.

К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар

Исследуется обобщение задачи [1, 2]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}=\mathbf{C}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{C}_2(t)+\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t)+\mathbf{F}\left(t,\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{M},\ \mathbf{X}(\omega)=\mathbf{N}, \qquad (2)$$

где $(t,\mathbf{X})\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_i\in\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mathbf{F}\in\mathbb{C}\left(D,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $D=\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):t\in I,\|\mathbf{X}\|<\tilde\rho_1,\|\mathbf{Y}\|<\tilde\rho_2\}$, $\mathbf{Y}=d\mathbf{X}/dt$, $I=[0,\omega]$, $0<\tilde\rho_i\le\infty$ $(i=1,2)$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально).

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–5], с помощью метода [6] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Приняты следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{C}_2(t)+\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}),\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}),$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}),\gamma=\|\Phi^{-1}\|,\ c_i=\max_t\|\mathbf{C}_i(t)\|,h_1=\max_t\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\|,$$

$$h_2=\max_t\|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\|,G=\{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}):t\in I,\ \|\mathbf{X}\|\le\rho_1,\ \|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\},$$

$$\lambda_U=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|,\lambda_V=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,\ p_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3L_1,$$

$$p_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2L_1,q_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(L_2+c_1+c_2),q_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(L_2+c_1+c_2),$$

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix},$$

где $t\in I$, $0<\rho_i<\tilde\rho_i$ $(i=1,2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ $(\mathbf{U}(0)=\mathbf{E})$, $d\mathbf{V}/dt=\mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ $(\mathbf{V}(0)=\mathbf{E})$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица;

$\mathbf{P_{UV}}(t)=\int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau,\ \mathbf{Q_{UV}}(t)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t);\ \mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)$; $L_i = L_i(\rho_1,\rho_2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ в области G; $\|\mathbf{X}\|_C=\max\limits_t \|\mathbf{X}(t)\|$ – норма непрерывной матрицы-функции в банаховой алгебре, $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [7, с. 21]; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе интегральной задачи, эквивалентной (1), (2),

$$\mathbf{X}=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\qquad \mathbf{Y}=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{3}$$

Интегральная задача (3) в явном виде дается соотношениями

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{M}+\int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \tag{5}$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены неравенства*

$$p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1\le\rho_1,\ p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2\le\rho_2,\ p_1+q_2<1.$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области G, *при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z}\le(\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Замечание. Приведенная теорема, как и [1–5], представляет собой обобщение [8, с. 497] на случай области более общей конфигурации.

Для построения решения задачи (4), (5) разработан алгоритм классического типа (см., например [9, с. 605]), который применительно к операторной системе (3) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\ \mathbf{Y}_{k+1}=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_0(t),\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащие множеству $\tilde{G}=\left\{(\mathbf{X}(t),\ \mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C\le\rho_1,\|\mathbf{Y}\|_C\le\rho_2\right\}$, при этом все приближения удовлетворяют условию (2).

Алгоритм (6) для интегральной задачи (4), (5) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}(t)=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+$$

$$+\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$k=0,1,2,\ldots,$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\right)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Исследована сходимость, скорость сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки типа [1, 2].

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).

2. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570–583.

3. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *О разрешимости задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., 5 – 10 сентября 2016 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2016. Ч. 2. С. 32–33.

4. Кашпар А.И. *Разрешимость и построение решения задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // матер. XX Междунар. науч.-техн. конф, 31 мая – 03 июня 2022 г. Новополоцк. Полоцкий государственный университет. 2022. С. 59–59.

5. Кашпар А.И. *Регуляризация задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всероссийской конф. с междунар. участием, посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, 14 – 16 июня 2022 г. Ижевск. Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. С. 64–67.

6. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

8. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.

9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Исследуется задача типа [1] отыскания $x \in \mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0,\omega]$, $i = \overline{1,k}$, $\omega > 0$.

Система (2) представляет собой обобщение задачи [2], а при $k = \infty$ – задач [3, с. 264], [4, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [5, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

В данной работе результаты [1] развиты применительно к (1), (2). Сначала определяется структура типа [1], [5, гл. 4] решения задачи. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ системы (2) при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение

$$x(t) = y(t) + \mathcal{L}_t(y) + g(t), \tag{3}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [1], последовательно доопределяемая в рамках соответствующего алгоритма с сохранением произвола, $\mathcal{L}_t(y), g(t)$ – соответственно линейный однородный интегральный оператор и функция, получаемые по алгоритму

$$\mathcal{L}_{j+1}(y_{j+1}) = \mathcal{L}_j(y_{j+1}) - \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1}) \left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1} \int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1}\left(y_{j+1} + \mathcal{L}_j(y_{j+1})\right) d\tau, \tag{4}$$

$$g_{j+1} = g_j + \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1}) \left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1} \left[\mu_{j+1} - \int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1} g_j d\tau\right], \tag{5}$$

$j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[a_j, b_j]$, при этом $\mathcal{L}_0(y_1) = 0$, $\mathcal{L}_0(\Phi_1) = \Phi_1$, $g_0 = 0$, $\mathcal{L}_k(y_k) = \mathcal{L}(y)$, $y_k = y$, $a_0 = b_0 = 0$,

$$\det\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right) \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{6}$$

Выполнение условия (6) обеспечивает реализуемость процесса (4), (5) построения $\mathcal{L}_t(y), g(t)$, начиная с

$$\mathcal{L}_1(y_1) = -\Phi_1 \left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1} \int\limits_{a_1}^{b_1} \Psi_1 y_1 d\tau, \quad g_1 = \Phi_1 \left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1} \mu_1.$$

Соотношение (3) принимается за основу как представление типа [1, 2], [5, гл. 4] решения задачи (1), (2). Следуя методике, используемой в [1], сведём эту задачу к эквивалентному интегральному уравнению. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = U(t) \left[x_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau\right], \tag{7}$$

где $U(t)$ ($U(0) = E$ – единичная матрица) – фундаментальная матрица, $x_0 = x(0)$.

Далее следует согласовать функции $x(t)$, $\tilde{x}(t)$. Из (3) имеем

$$x_0 = y_0 + \mathcal{L}_0(y) + g_0. \tag{8}$$

На основе (3), (7), (8) получим

$$x(t) = U(t)\left[y_0 + \mathcal{L}_0(y) + g_0\right] + U(t) \int\limits_0^t U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \tag{9}$$

Произвол функции $y(t)$ обеспечивает условие (8) согласования выражений (3), (7). Искомое интегральное уравнение имеет вид

$$y(t) = \mathcal{K}_t(y) + p(t), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{K}_t(y) = U(t)\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y), \quad p(t) = U(t)\left[y_0 + g_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right] - g(t).$$

Однозначная обратимость операций, используемых при получении (10), позволяет выполнить переход от (10) с учётом (3) к (1), (2). Тем самым, всякое непрерывное решение уравнения (10) является решением задачи (1), (2) в представлении (3). Это означает эквивалентность интегральной задачи (10) дифференциальной задаче (1) с интегральными условиями (2).

Для изучения разрешимости в пространстве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ уравнения (10) воспользуемся принципом сжимаемых отображений [3, с. 604]. Пусть $q = \|\mathcal{K}_t(y)\|_C$ – норма оператора $\mathcal{K}_t(y)$ в этом пространстве. На основании этого принципа при выполнении условия $q < 1$ уравнение (10) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|_C \leqslant \frac{h}{1-q} \quad \left(h = \max_{t\in I}\|p(t)\|\right). \tag{11}$$

Вместо (11) можно получить грубую, но явную оценку, если $\mathcal{K}_t(y)$ представить в следующем виде:

$$\mathcal{K}_t(y) = U(t)\left[\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y)\right] + \left[U(t) - E\right]\mathcal{L}_t(y).$$

Тогда

$$\|\mathcal{K}_t(y)\| \leqslant \|U(t)\| \, \|\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y)\| + \|U(t) - E\| \, \|\mathcal{L}_t(y)\|. \tag{12}$$

Для слагаемых в правой части (12) могут быть получены явные оценки.

Лемма. *При выполнении условия $q < 1$ уравнение (10) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (11).*

Теорема. *Пусть выполнено условие (6), а также $q < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в представлении (3), при этом справедлива оценка $\|x\|_C \leqslant \dfrac{(1+a)h}{1-q} + \delta$, где $\delta = \max\limits_{t\in I}\|g(t)\|$, $a = \|\mathcal{L}_t(y)\|_C$.*

Литература

1. Лаптинский В.Н. *Об одной дифференциальной задаче с условиями интегрального типа* // XX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2022»: мат-лы междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая–03 июня 2022 г.: в 2 ч. Ч. 1. Новополоцк: Полоцкий гос. ун-т. 2022. С. 61–62.

2. Лаптинский В.Н. *К решению интегральных задач* // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилёв, 21–22 апреля 2022 г. Могилёв: Белорус.-Рос. ун-т. 2022. С. 401–402.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

4. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

5. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

К КОНСТРУКТИВНОМУ АНАЛИЗУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Изучается задача типа [1] построения $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^{\omega} A(\tau)x(\tau)d\tau = -\int\limits_0^{\omega} f(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{3}$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0, \omega]$, $i = \overline{1, k}$; $\omega > 0$; (1), (2) представляют собой периодическую краевую задачу в постановке по методу регуляризации [2], [3, гл. 3]; (3) – обобщение интегральных условий [1], а при $k = \infty$ – условий типа [4, с. 264], [5, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа, $\Phi_i(0) = \Phi_i(\omega)$. Допускается случай $f(t) = 0$.

Для отыскания решения задачи (1)–(3) сначала для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ системы (3) с помощью методики [6, 7] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [1]

$$x(t) = y(t) + \mathcal{L}_t(y) + g(t), \tag{4}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [1], последовательно доопределяемая в рамках соответствующего алгоритма с сохранением произвола, $\mathcal{L}_t(y), g(t)$ – соответственно линейный однородный интегральный оператор и функция, конструируемые по алгоритму

$$\mathcal{L}_{j+1}(y_{j+1}) = \mathcal{L}_j(y_{j+1}) - \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1}\left(y_{j+1} + \mathcal{L}_j(y_{j+1})\right)d\tau, \tag{5}$$

$$g_{j+1} = g_j + \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\left[\mu_{j+1} - \int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1}g_j d\tau\right], \tag{6}$$

$j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[a_j, b_j]$, при этом $\mathcal{L}_0(y_1) = 0$, $\mathcal{L}_0(\Phi_1) = \Phi_1$, $g_0 = 0$, $\mathcal{L}_k(y_k) = \mathcal{L}_t(y)$, $y_k = y$, $a_0 = b_0 = 0$,

$$\det\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right) \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{7}$$

Условие (7) обеспечивает выполнимость структурных элементов алгоритма (5), (6).

Соотношение (4) принимается за основу как представление типа [1], [3, гл. 4] решения задачи (1)–(3). Следуя методике, используемой в [1], эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению, исходя из (4) и интегрального уравнения [3, гл. 2],

$$x(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)\,[A(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\,d\tau - \tilde{A}^{-1}\int_0^\omega f(\tau)d\tau, \tag{8}$$

полученного при выполнении условия

$$\det \tilde{A} \neq 0, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}\int\limits_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega. \end{cases}$$

Используя произвол функции $y(t)$, получим (4), (8)

$$y(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)A(\tau)\,[y(\tau) + \mathcal{L}_\tau(y)]\,d\tau - \mathcal{L}_t(y) + p(t), \tag{10}$$

где

$$p(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)\,[A(\tau)g(\tau) + f(\tau)]\,d\tau - g(t) - \tilde{A}^{-1}\int_0^\omega f(\tau)d\tau.$$

Однозначная обратимость операций, используемых при получении (10), позволяет выполнить корректный переход от (10) к (1)–(3) с учётом (4). Тем самым, всякое непрерывное решение уравнения (10) является решением задачи (1)–(3) в представлении (4).

Для анализа разрешимости уравнения (10) в пространстве $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$ воспользуемся принципом сжимающих отображений [4, с. 604] на основе соответствующего (10) операторного уравнения

$$y = G_t(y) + p(t), \tag{11}$$

где $G_t(y)$ – интегральный оператор, определяемый правой частью (10).

Обозначения:

$$a = \|\mathcal{L}_t(y)\|_C, \qquad b = \|G_t(y)\|_C, \qquad h = \max_{t\in I}\|p(t)\|, \qquad \delta = \max_{t\in I}\|g(t)\|.$$

Лемма. *При выполнении условия $b < 1$ решение уравнения (11) существует и единственно, при этом справедлива оценка*

$$\|y\|_C \leqslant \frac{h}{1-b}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия (7), (9), а также $b < 1$. Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в представлении (4), при этом справедлива оценка $\|x\|_C \leqslant \dfrac{(1+a)h}{1-b} + \delta$.*

Для построения решения $x(t)$ может быть использован классический метод последовательных приближений [4, с. 605].

Литература

1. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 75–78.

2. Лаптинский В.Н. *К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений* // Междунар. математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси. 2021. С. 98–100.

3. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

5. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

6. Лаптинский В.Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.

7. Лаптинский В.Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Исследуется краевая задача типа [1,2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + G(t,X) + \lambda F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I\times\mathbb{R}^{n\times n}$, $G(t,X) = Q_1(t)X^2 + XQ_2(t)X + X^2Q_3(t)$, $A, B, Q_i \in \mathbb{C}\ (I,\mathbb{R}^{n\times n})(i = 1,2,3), F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q_i = 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5 и др.]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением, обобщением и развитием [1, 2, 7]. Задача (1), (2) рассматривается в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [8, с.21],

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\}, M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t\|A(t)\|, \beta = \max_t\|B(t)\|, \delta_i = \max_t\|Q_i(t)\|(i = 1,2,3),$$

$$h = \max_t\|F(t,0)\|, \varepsilon = |\lambda|,\ q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho) = 3\gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2, q_2(\rho) = \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = 3\gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \varphi_2(\rho) = [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)}, \varepsilon_2 = \frac{1 - q_1(\rho)}{q_2(\rho)}, \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $\delta = \max\delta_i (i = 1,2,3)$, $0 < \rho < \tilde{\rho}, t \in I, L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho) < \rho$, $q_1(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho, \varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) = \Phi^{-1}\Big\{ \int_0^\omega A(\tau)d\tau \int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + G(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda)) +$$

$$+\lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma + \int_0^\omega \Big(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+G(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda)) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma \Big) B(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^\omega [G(\tau, X_k(\tau,\lambda)) + \lambda F(\tau, X_k(\tau,\lambda))]d\tau \Big\}, \ k = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^\omega F(\tau, 0)d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \le \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + q_2\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \ k = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками:

$$\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \le \varepsilon\gamma\omega h;$$

$$\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} \le \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho + \varepsilon h] + \gamma\omega(3\delta\rho^2 + \varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача при $n = 2$.

Замечание. В [7] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен для реализации тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая. О. А. // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С.43-50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференц. уравнения, 2018. Т. 54. №7. С. 937-946.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.
5. Лаптинский В. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. №4. С.14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.
7. Маковецкая О. А. // Материалы междунар. науч. конф. "Еругинские чтения - 2019". Минск, 2019. Т.1. С. 83-84.
8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М. : Наука, 1967.

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})(i = 1,2)$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, M, N – постоянные $n \times n$-матрицы, функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

С помощью качественных методов задача (1), (2) рассматривалась в [1]. На основе конструктивного метода [2, гл.3] эта задача изучалась в работах [3; 4, гл. 1-3] в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций $X(t)$ с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$\tilde H(\omega) = \int\limits_0^\omega H(\tau)d\tau, H \in \{A,B\}, D_\rho = \{(t,X) : t \in I, \|X\| \le \rho < \tilde\rho\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde A(\omega) - M - N), S = -\tilde B(\omega), \Psi(t)X = A(t)X + XB(t),$$

$$\Phi X = RX - XS, m = \|M^{-1}(M+N)\|, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t\in I}\|F(t,0)\|, q = \gamma\omega\Big[(\alpha+\beta+L)\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\Big) + L\Big],$$

$$\tilde q = \gamma(\alpha+\beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$p = \gamma\omega h\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega + 1\Big), q_1 = (q-\tilde q)/(1-\tilde q) < q,$$

где $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ, оператор Φ и при каждом $t \in I$ оператор $\Psi(t)$ – линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det M \neq 0$, *матрицы* R, S *не имеют общих характеристических чисел,* $q < 1$, $p/(1-q) \leq \rho$. *Тогда в области* D_ρ *решение* $X = X(t)$ *задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся по* $t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением, при этом справедлива оценка* $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq p/(1-q)$.

Рекуррентное интегральное соотношение представляет собой итерационный алгоритм

$$X_k(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X_k(t), X_{k-1}(t)), k \in \mathbb{N},$$

где в качестве начального значения функции X_0 может быть взята любая функция из пространства $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$, $\mathcal{L}$ – линейный оператор $\mathcal{L} : \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n}) \to \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, заданный равенством

$$L(X(t), Y(t)) = M^{-1}(M+N)\int\limits_t^\omega (\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau, Y(\tau)))d\tau +$$

$$+\int\limits_0^\omega [K_A(t,\tau)(\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau, Y(\tau)))+$$

$$+(\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau, Y(\tau)))K_B(t,\tau)]d\tau - \int\limits_0^\omega F(\tau, Y(\tau))d\tau, \tag{3}$$

где

$$K_H(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^\tau H(\sigma)d\sigma, 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_\tau^\omega H(\sigma)d\sigma, 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Справедливы оценки

$$\|X - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q_1^m\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q_1},\ \|X_{\mathbb{C}}\| \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q_1},$$

где при $X_0 = 0$

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{p}{1-\tilde{q}}.$$

Таким образом, оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма и область локализации решения, имеют вид

$$\|X - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q_1^m p}{1-q}, \|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{p}{1-q}.$$

Замечание. В работе [5] рассмотрен случай $\det N \neq 0$. Как и в [5], вычислительная схема алгоритма (3) является неявной, при этом приближенные решения, полученные по этому алгоритму, удовлетворяют краевому условию (2).

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Маковецкий И. И. // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии. Материалы Международной научно-технической конференции. Могилев. 2020. С. 497-498.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев, 2012.

5. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 137-141.

ОБОБЩЕННЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ И ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Определение 1. Обобщенным первым интегралом дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in R, \quad x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \tag{1}$$

мы называем дифференцируемую не вырождающуюся в постоянную по x функцию $U(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, системы (1) обращается в четную функцию $U(t,x(t)) = \varphi_{ev}(t)$.

Естественно, что любой обыкновенный первый интеграл является обобщенным первым интегралом.

Определение 2. Отражающей функцией системы (1) названа [1] дифференцируемая функция $F(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, удовлетворяет соотношению $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$.

Откуда следует, что дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f(t,x) + f(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

Приложения отражающей функции можно посмотреть в [2-5] и других работах этих авторов. Эти приложения основаны на том, что если $F(t,x)$ — отражающая функция 2ω-периодической системы, то $F(-\omega,x)$ является отображением Пуанкаре этой системы на периоде $[-\omega,\omega]$.

Теорема 1. *Пусть* $F(t,x) = (F_1(t,x),...,F_n(t,x))^T$ *— отражающая функция дифференциальной системы (1). Тогда функции* $U_i(t,x) := x_i + F_i(t,x)$, $i = \overline{1;n}$, *являются обобщенными первыми интегралами этой системы. Эти интегралы образуют базис во множестве обобщенных первых интегралов в том смысле, что каждый обобщенный первый интеграл* $V(t,x)$ *можно записать в виде* $V(t,x) = \Phi(t, U_1(t,x),...,U_n(t,x))$, *где* Φ *четна по первому аргументу.*

Теорема 2. *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P(\varphi,\rho)}{1 + 2m\rho + a\cos\rho + 2am(\sin\rho + \rho\cos\rho) + ma^2\sin 2\rho}$$

выполнены условия:

1) *функция* $a = a(\varphi)$ *имеет производную* $a'(\varphi)$ *и* 2π *-периодична;*
2) *для функций* $P(\varphi, \rho)$ *верно тождество* $P(\varphi, 0) \equiv 0$ *и справедливо соотношение* $P(\varphi, \rho) + (1 + 2mU)a'(\varphi) \sin \rho = \Phi(\varphi, U)$, *где* $U = \rho + a(\varphi) \sin \rho$, *а функция* $\Phi(\varphi, U)$*– нечетна по первому аргументу.*

Тогда функция $U(\varphi, \rho) = \rho + a(\varphi) \sin \rho$ *представляет собой обобщенный первый интеграл рассматриваемого уравнения, а особая точка* $\rho = 0$ *для этого уравнения является центром при условии, что* $|a(\varphi)| < 1$ *для всех* φ.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем.* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XVII. № 9. С. 1603–1610.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.

3. Zhou Zhengxin. *The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications* Beijing: 2014.

2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель, 2004.

5. Мусафиров Э. И. *Временные симметрии дифференциальных систем.* Пинск, 1966.

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.В. Мусафиров

Так как многие качественные свойства решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко [1], являются общими, то целесообразно для хорошо изученных систем искать возмущения, не изменяющие отражающую функцию Мироненко (так называемые *допустимые возмущения*). Если удастся найти допустимые возмущения, то мы тем самым узнаем, какие возмущения не меняют качественных свойств решений (устойчивость по Ляпунову, по Липшицу, глобальную экспоненциальную устойчивость, наличие периодических решений и их асимптотическую устойчивость (неустойчивость), наличие хаотических аттракторов), присущих решениям исходной невозмущенной системы.

Для поиска допустимых возмущений можно воспользоваться теоремой 1 из [2], которую сформулируем здесь в следующем виде:

Теорема 1. *Если вектор–функции* $\Delta_i(t, x)$ $(i = \overline{1, m}$, *где* $m \in \mathbb{N}$ *или* $m = \infty)$ *удовлетворяют тождеству*

$$\frac{\partial \Delta_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_i(t, x)}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta_i(t, x) \equiv 0, \qquad (1)$$

то одинаковые отражающие функции Мироненко имеют системы $\dot{x} = X(t, x)$ *и* $\dot{x} = X(t, x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) \Delta_i(t, x)$, *где* $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_i(t)$ *— произвольные непрерывные скалярные нечетные функции.*

В качестве исходных систем рассматриваются известные автономные полиномиальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. системы у которых правая часть $X(t, x) \equiv X(x)$ и компоненты вектора $X(x)$ — полиномы). Поиск допустимых возмущений осуществляется методом неопределенных коэффициентов, используя тождество (1) для вектор–функций $\Delta_i(t, x) \equiv \Delta_i(x)$ компоненты которых — полиномы. В этом случае тождество (1) имеет вид $\frac{\partial \Delta_i(x)}{\partial x} X(x) \equiv \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Delta_i(x)$.

Используя Теорему 1 и указанный выше подход получены допустимые возмущения для автономных 3-мерных полиномиальных систем таких как система Лоренц-84 [3], система Лэнгфорда [4, 5], обобщённая система Лэнгфорда [6], обобщенная система Носе – Гувера [7] и другие. В [8] получены допустимые возмущения модели нейрона Хиндмарш – Роуз:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r\,(s\,(x-\alpha) - z)\,; \quad x, y, z, a, b, c, d, I, r, s, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

В частности, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Отражающие функции Мироненко системы (2) и системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ((b - ax)\,x^2 + y - z + I)\,(1 + \alpha_1\,(t))\,, \\ \dot{y} &= (c - y)\,(1 + \alpha_1\,(t) - \alpha_2\,(t))\,, \\ \dot{z} &= (s\,(x - \alpha) - z)\,(1 + \alpha_1\,(t)) + (y - c)\,\alpha_2\,(t) \end{aligned} \tag{3}$$

совпадают, если $d = 0$*,* $r = 1$ *и* $\alpha_i(t)$ *— произвольные скалярные нечетные функции* $(i = \overline{1, 2}\,)$*.*

Рис. 1 иллюстрирует одинаковое поведение решений систем (2) и (3) при $a = 1/2$, $b = 2$, $c = I = r = \alpha = 1$, $s = 5$, $d = 0$, $\alpha_i(t) = \sin(i\,t)$, $i = \overline{1, 2}$ и начальных условиях $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

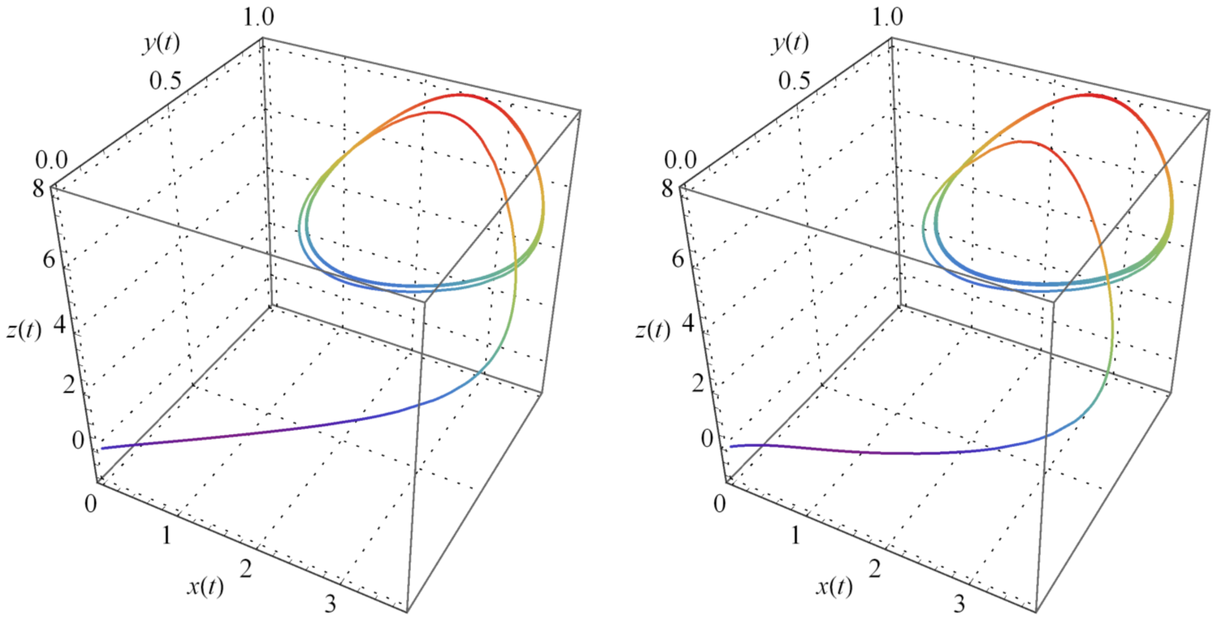


Рис. 1. Решение систем (2) и (3) (слева и справа соответственно) в фазовом пространстве

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

2. Mironenko V. I., Mironenko V. V. *How to construct equivalent differential systems* // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. № 9. P. 1356–1359.

3. Musafirov E. V. *Admissible perturbations of the Lorenz-84 climate model* // International journal of bifurcation and chaos. 2019. Vol. 29. № 6. 1950080.

4. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения системы Лэнгфорда* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.

5. Musafirov E. V. *Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function* // International journal of bifurcation and chaos. 2017. Vol. 27. № 10. 1750154.

6. Musafirov E., Grin A., Pranevich A. *Admissible perturbations of a generalized Langford system* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32. № 03. 2250038.

7. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения обобщенной системы Носе – Гувера в одном случае* // Ползуновский альманах. 2020. № 1. С. 221–222.

8. Musafirov E. *Admissible perturbations of the three–dimensional Hindmarsh – Rose neuron model* // Journal of Applied Analysis & Computation. doi: 10.11948/20210098 (в печати).

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д.В. Роголев

Изучается краевая задача, аналогичная [1],

$$\frac{dX}{dt} = G_1(t, X, Y), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{3}$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + XS_1(t)X + XS_2(t)Y + YS_3(t)X + YS_4(t)Y + F_1(t),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + YP_1(t)X + YP_2(t)Y + XP_3(t)Y + XP_4(t)X + F_2(t),$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$.

В теории и приложениях дифференциальных уравнений важную роль играют матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения [2–6]. Краевая задача типа (1)–(3), по-видимому, впервые поставлена в [5].

Обозначения:

$$D = \{(t, X, Y)\colon t \in I,\ \|X\| \leqslant \rho_1,\ \|Y\| \leqslant \rho_2\}, \qquad \tilde{A}_i(\omega) = \textstyle\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau, \quad \gamma_i = \left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i = \max_{t\in I}\|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{t\in I}\|B_i(t)\|, \quad \delta_j = \max_{t\in I}\|S_j(t)\|, \quad \mu_j = \max_{t\in I}\|P_j(t)\|,$$

$$h_i = \max_{t\in I}\|F_i(t)\|, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 4}, \quad q_{11} = \gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left[\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + (\delta_2 + \delta_3)\rho_2\right] + \right.$$

$$\left. + \omega\left[\beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + (\delta_2 + \delta_3)\rho_2\right]\right\}, \quad q_{12} = \gamma_1\left[(\delta_2 + \delta_3)\rho_1 + 2\delta_4\rho_2\right]\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega + 1\right),$$

$$q_{21} = \gamma_2\left[(\mu_1 + \mu_3)\rho_2 + 2\mu_4\rho_1\right]\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega + 1\right),$$

$$q_{22} = \gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left[\alpha_2 + \beta_2 + (\mu_1 + \mu_3)\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right] \quad + \omega\left[\beta_2 + (\mu_1 + \mu_3)\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right]\right\},$$

где $\rho_1, \rho_2 > 0$.

На основе применения метода [6, гл. 3] задача (1)–(3) рассматривается в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций с нормой $\|T\|_C = \max\limits_{t\in I}\|T(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определённая норма матриц в этой алгебре, $T \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предлагаемая работа является продолжением и обобщением [1, 7–9].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \tilde{A}_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$,

2) $$\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_1\omega^2 \left[(\alpha_1+\beta_1)\,\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2+\delta_3)\,\rho_1\rho_2 + \delta_4\rho_2^2 + h_1 \right] + \right.$$
$$\left. + \,\omega \left(\beta_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2+\delta_3)\,\rho_1\rho_2 + \delta_4\rho_2^2 + h_1 \right) \right\} \leqslant \rho_1,$$
$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2\omega^2 \left[(\alpha_2+\beta_2)\,\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1+\mu_3)\,\rho_1\rho_2 + \mu_4\rho_1^2 + h_2 \right] + \right.$$
$$\left. + \,\omega \left(\beta_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1+\mu_3)\,\rho_1\rho_2 + \mu_4\rho_1^2 + h_2 \right) \right\} \leqslant \rho_2,$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = diag(1,1)$, $A = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D.

Решение данной задачи строится по алгоритму в дифференциальной форме

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{5}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (4), (5) при $k = 0$ из соответствующих условий (6) для приближения $X_1(t), Y_1(t)$,

$$\int\limits_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0, \quad \int\limits_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0.$$

На основе (4)–(6) получены рекуррентные интегральные соотношения

$$X_k(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau - \right.$$
$$- \int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau -$$
$$\left. - \int\limits_0^\omega \left[G_1\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_1(\tau)X_k(\tau) \right] d\tau \right\}, \tag{7}$$

$$Y_k(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma \right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau - \right.$$

$$-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X_{k-1}(\tau),Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[G_2\left(\tau,X_k(\tau),Y_k(\tau)\right)-A_2(\tau)Y_k(\tau)\right]d\tau\right\},\quad k=1,2,\ldots \tag{8}$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8).

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* М. : Наука, 1975.

3. Параев Ю. И. *Уравнения Ляпунова и Риккати.* Томск : Томск. гос. ун-т, 1989.

4. Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М. : Физматлит, 2001.

5. Анисович В. В., Крюков Б. И., Мадорский В. М. *Об одном подходе к решению задач оптимального управления* // Доклады АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 265–268.

6. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998.

7. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010. № 1(35). Могилёв : МГУ. 2010. С. 12–23.

8. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв : МГУ. 2011. С. 4–19.

9. Роголев Д. В. *Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщённой системы матричных дифференциальных уравнений Риккати* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 114–117.

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. Руденок

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-y+\lambda x+P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=x+\lambda y+Q(x,y), \tag{1}$$

$\lambda\neq 0, P, Q$ – голоморфные в окрестности точки $O(0,0)$, начинающиеся со степеней ≥ 2. Пусть $\Gamma_k:\gamma(x,y,k)=0$ – голоморфное в окрестности точки $O(0,0)$ семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в точке $O(0,0)$ с разными угловыми коэффициентами k. Точка O рассекает кривую Γ_k на две дуги: Γ_k^+ и Γ_k^-. Кривые Γ_k называются изохронами системы, если любая траектория системы (1), пересекающая дугу Γ_k^+ при значении $t=t_0$ пересекает дугу Γ_k^- при значении $t=t_0+\pi$. Если изохроны системы существуют, то особая точка $O(0,0)$ называется изохронной. Справедлива

Теорема 1[1]. *Существует голоморфная замена*

$$u=x+U(x,y),\quad v=y+V(x,y),$$

переводящая систему (1) в линейную систему

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v.$$

Здесь $U(x, y)$, $V(x, y)$ – функции без линейных членов.

Из теоремы 1 следует, что голоморфная система (1), имеющая грубый фокус в начале координат, является изохронной. Изохронами системы являются кривые $y + V(x, y) = k(x + U(x, y))$.

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) была сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная замена*

$$u = x + U(x, y), \quad v = y,$$

переводящая систему (1) в систему вида

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u + uF(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v + vF(u, v).$$

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + ax^2 + bxy + Ay^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{2}$$

Теорема 3. *Для того чтобы система (2) была сильно изохронной, необходимо и достаточно, чтобы она была одной из систем*

1) $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 48x^2(-a + m\lambda) + 4y^2(3a - 2m\lambda + a\lambda^2) + 8xy(2m - a\lambda + 3m\lambda^2)$,

2) $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 2bxy - bx^2\lambda + by^2\lambda, \quad \frac{dy}{dt} = x + y\lambda - bx^2 + by^2 - 2bxy\lambda.$

3) $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 12my^2(2s - 3\lambda) + 4mx^2\lambda s^2 - 8mxy(18 + s^2)$,
$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + 4mx^2s^2 - 4my^2(9 + 4s^2 - 6s\lambda) + 8mxys(6 + s\lambda)$.

4) $\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + 48x^2(-a + m\lambda) + 4y^2(3a - 2m\lambda + a\lambda^2) + 8xy(2m - a\lambda + 3m\lambda^2)$,
$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda - 24xy(a - m\lambda) + 4y^2(m - 2a\lambda + 3m\lambda^2)$.

Соответствующие уравнения их изохрон:

1) $y = kx(1 + 4mx)$,

2) $y = k(x - bx^2 - by^2)$,

3) $y = k(36my^2 + 4mx^2s^2 + x(1 + 24msy))$,

4) $y(1 - 12ay + 12my\lambda) = k(x - 4my^2 - 4ay^2\lambda)$,

где k – угловой коэффициент касательной к изохроне в начале координат.

Теорема 4. *Изохроны каждой из систем 1) - 4) кроме точки пересечения $O(0, 0)$ имеют еще одну точку пересечения O_1, которая, в свою очередь, является грубым изохронным фокусом системы. Изохронами этого фокуса является те изохроны фокуса $O(0, 0)$, которые проходят через точку O_1.*

Ниже на рис. 1 представлены траектории системы 2) при значениях $\lambda = b = 1$, два изохронных фокуса $O(0, 0)$, $O_1(1, 0)$ и два изохронных сечения: окружности $ky = x - x^2 - -y^2$, $k = 0$, $k = 1/8$, общие для обоих фокусов. На рис. 2 изображены изохронные фокусы $O(0, 0)$, $O_1(1, 0)$, изохронное сечение $x - x^2 - y^2 = 0$, полутраектории $\widehat{A_1 A_2}$, $\widehat{B_1 B_2}$ от $t = 0$ до $t = \pi$ и две следующие полутраектории от $t = \pi$ до $t = 2\pi$. Графики выполнены компьютерной системой “Mathematica”.

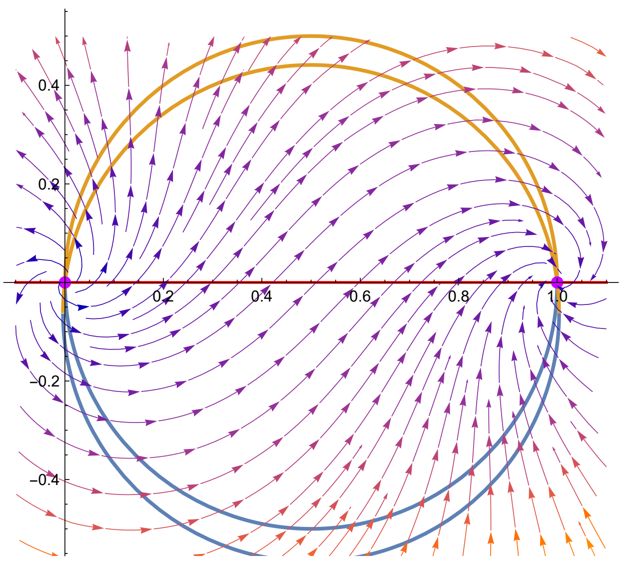


Рис. 1. Траектории системы 2.

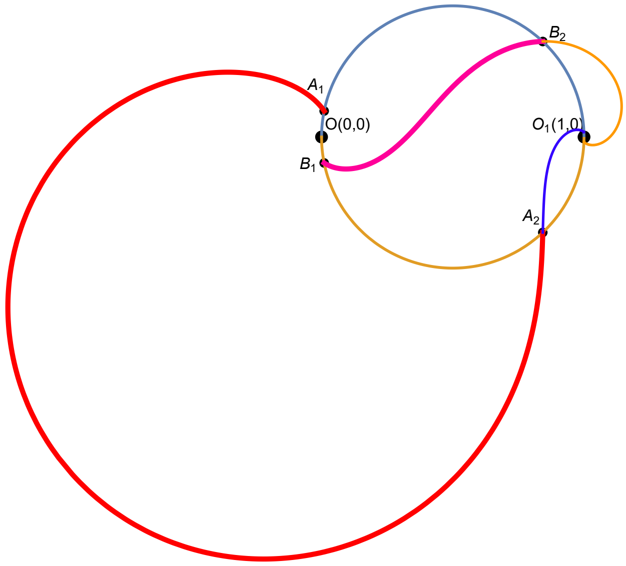


Рис.2. Полутраектории системы 2.

Литература

1. Chow S. N., Li C., Wang D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields.* Cambridge University Press, 1994.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ «НОРМАЛЬНОГО» РАЗМЕРА СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА $2A+3S$ И $3A+2S$

И.Н. Сидоренко

Рассмотрим систему Льенара с пятью простыми особыми точками

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \epsilon f(x)y, \tag{1}$$

где $g(x)$ - полином 5-ой степени, $\epsilon > 0$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. В данной работе рассматривается только тот случай, когда полином $g(x)$ имеет 5 простых корней, и тогда система (1) может иметь следующие конфигурации особых точек $2A+3S$ и $3A+2S$. Данная работа является обобщением результатов полученных в [1, 2, 3] на случай не симметричного векторного поля. Целью данной работы является исследование максимального количества предельных циклов «нормального размера», а также построение систем (1) с заданным количеством предельных циклов.

Без ограничения общности будем предполагать, что точка $O(0,0)$ является особой точкой системы (1) и справа и слева от неё располагается одинаковое количество особых точек. Таким образом возможны следующие варианты:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1+Lx)(1-Mx)(1+Wx) - \epsilon f(x)y, \tag{2}$$

где $0 < W < L, 0 < M < 1,$ тогда система (2) имеет конфигурацию особых точек $2A+$ $+3S$ - 2 антиседла и 3 седла, причем точка $O(0,0)$ - седло, а точки $A(-\frac{1}{L},0)$ и $E(1,0)$ - антиседла (рисунок 1).

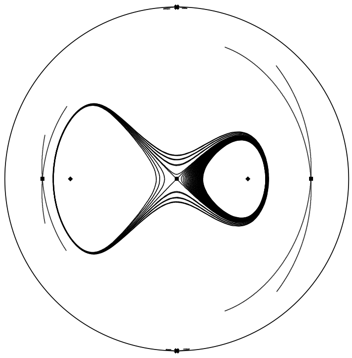


Рисунок 1. Фазовый портрет системы (2) на сфере Пуанкаре

$$\frac{dx}{dt} = y, \;\; \frac{dy}{dt} = -x(1-x)(1+Lx)(1-Mx)(1+Wx) - \epsilon f(x)y, \tag{3}$$

где $0 < W < L, 0 < M < 1,$ тогда система (2) имеет конфигурацию особых точек $3A + 2S$ - 3 антиседла и 2 седла, причем точки $O(0,0)$ - антиседло, а точки $A(-\frac{1}{L}, 0)$ и $E(1,0)$ - седла (рисунок 2).

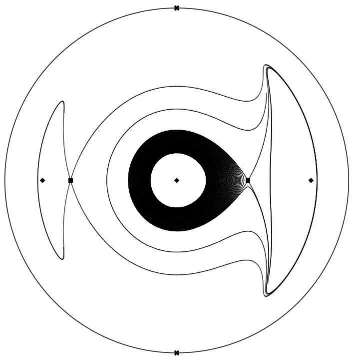


Рисунок 2. Фазовый портрет системы (3) на сфере Пуанкаре

Для исследования применяется разработанный прогнозный метод оценки числа предельных циклов «нормального размера» для систем Льенара [2] и метод возмущения негрубого фокуса [3].

Определение 1. Пусть система Льенара (1) имеет антиседло $(0_0, 0)$. Обозначим, через ξ_1 (ξ_2) – абсциссу ближайшей слева (справа) к точке А особой точки, если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $(0_0, 0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), \;\; G(\eta) = G(\mu), \tag{4}$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x)dx$, $G(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} g(x)dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Сформулированное определения остаётся справедливым и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом равным $+1$. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать «центральную» точку (это может быть и седло), ξ_1, ξ_2 - абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу вокруг которой производится оценка, а $\xi_1 < \eta < \zeta_1$, $\zeta_2 < \mu < \xi_2$, где ζ_1, ζ_2 - находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max G(x_i)$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2$, x_i - абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

Метод возмущения негрубого фокуса. Обозначим через a − вектор коэффициентов системы (1), и пусть при $a = a^0$ система имеет k предельных циклов вокруг точки $O(0,0)$, которые распределены не равномерно. Выберем на промежутке $I = [p, q]$, $p > 0$ точки $x_1, ..., x_{k+1}$ и рассмотрим функцию последования $\Delta(x, a^0 + \Delta a)$, $x \in I$, Δa некоторое возмущеие системы (1), тогда $\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum\limits_{j=1}^{n} tp(i,j)\Delta a_j + o(\Delta a)$, где $tp(i,j) = \frac{\partial \Delta^k(x_i^k, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Далее решаем задачу линейного программирования

$$L \to \min,\ \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^{n} tp^k(i,j)\Delta a_j\right) \geq 0,\ i = \overline{1, k+1},\ |\Delta a_j| \leq L. \qquad (5)$$

Если задача (5) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то соответствующая система Льенара имеет, по крайней мере, k предельных циклов.

Пример. Система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \ \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1+\frac{1}{2}x)(1-\frac{1}{4}x)(1+\frac{1}{4}x) - \frac{1}{100}(-1.64 + 0.84x + x^2)y,$$

имеет два предельных цикла, окружающие группу особых точек и один предельный цикл вокруг фокуса $E(1,0)$.

Теорема 1. *Если* $G(0) >= G(-\frac{1}{M})$ *или* $G(0) >= G(\frac{1}{W})$, *то система прогноза* (4) *составленная для группы особых точек* $O(0,0)$, $A(-\frac{1}{L}, 0)$ *и* $E(1,0)$ *не имеет решения.*

Гипотеза *Максимальное число предельных циклов, окружающих группу особых точек, у системы (1) не меньше 3 .*

Литература

1. Сидоренко И. Н.*Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Льенара с симметрией* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2019. № 2. С. 21–29.

2. Сидоренко, И. Н. *Предельные циклы кубической системы Льенара типа 2A + 1S* / И.Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя АА Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. Могилев. 2022. №2. С. 21–29.

3. Гринь А.А., Кузьмич А.В., Сидоренко И.Н. *Распределения предельных циклов квадратичных систем с фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности* / А.А. Гринь, А.В. Кузьмич, И.Н. Сидоренко // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. Гродно. 2022. Т. 12. № 1. – С. 6–15.

4. Черкас Л.А., Гринь А.А., Булгаков В.И. *Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход).* Гродно. ГрГУ. 2013.

О ПРОБЛЕМЕ ЦЕНТРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДАРБУ

Д.Н. Чергинец

Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= N(x,y) + xP(x,y),\\ \tfrac{dy}{dt} &= M(x,y) + yP(x,y), \end{aligned}$$

где P – однородный многочлен степени m, M, N – однородные многочлены степени n. Система Дарбу при помощи замены переменных и исключения времени сводится к уравнению Бернулли [1, гл.1, §8]. Доказательство алгебраической неразрешимости проблемы центра и фокуса в работах [2, 3] проводилось, используя систему Дарбу, что говорит о важности изучения проблемы центра для системы Дарбу.

Пусть
$$B(x,y) \equiv yN(x,y) - xM(x,y) \neq 0 \quad \text{при} \ (x,y) \neq (0,0). \tag{1}$$
Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда $B(x,y) > 0$ при $(x,y) \neq (0,0)$.

Следуя [4, 5], в системе Дарбу выполним замену переменных
$$u = xB^k(x,y), \quad v = yB^k(x,y), \qquad \text{где} \ k = \frac{-1}{n+1}. \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = \left(xB^k\right)'_t = \left(xB^k\right)'_x (N + xP) + \left(xB^k\right)'_y (M + yP) =$$
$$= NB^k + xPB^k + kxPB^{k-1}\left(xB'_x + yB'_y\right) + kxB^{k-1}(NB'_x + MB'_y).$$
Для любого однородного многочлена B степени $n+1$ справедливо равенство
$$xB'_x + yB'_y = (n+1)B.$$
Также нетрудно доказать, что $NB'_x + MB'_y = B(N'_x + M'_y)$. Воспользовавшись записанными равенствами, получим
$$\frac{du}{dt} = NB^k + (1 + k(n+1))xPB^k + kxB^k(N'_x + M'_y).$$
Заменив время $dt = B^{k(n-1)}dT$, находим
$$\frac{du}{dT} = N(x,y)B^{kn}(x,y) + kxB^{kn}(x,y)(N'_x(x,y) + M'_y(x,y)).$$
Аналогично нетрудно выразить $\frac{dv}{dT}$. С учетом (2) получаем
$$\frac{du}{dT} = N(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)u,$$
$$\frac{dv}{dT} = M(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)v. \tag{3}$$
Здесь $N(u,v)$, $M(u,v)$ получены из $N(x,y)$, $M(x,y)$ подстановкой вместо x, y переменных u, v без учета (2), $\theta = 1/(n+1)$. В работах [4, 5] имеется опечатка, так как в них $\theta = 2/(n+1)^2$. Докажем, что начало координат для системы (3) является центром.

Перейдем от системы (3) к однородному уравнению
$$\frac{dv}{dv} = \frac{M(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)v}{N(u,v) - \theta\left(N'_u(u,v) + M'_v(u,v)\right)u}.$$
Следуя Н.П. Еругину [6, гл.1, §4], получаем решение однородного уравнения в параметрической форме
$$u(z) = CB^k(1,z), \quad v(z) = CzB^k(1,z).$$

Так как

$$\lim_{z\to\infty} u(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} v(z) = CN^k(0,1), \quad \lim_{z\to-\infty} v(z) = -CN^k(0,1),$$

то согласно [6, с. 44] начало координат системы (3) является центром. Доказана следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условия* (1) *особая точка* $(0,0)$ *системы* (3) *является центром.*

В работе [4] получены необходимые и достаточные условия центра системы Дарбу, однако, для наличия в начале координат системы Дарбу центра наряду с условием (1) требуется также, чтобы начало координат системы (3) являлось центром. На основании доказанной выше теоремы условие 2) в теореме 5 из статьи [4] лишнее, так как оно выполняется при выполнении условия 1) теоремы 5 из статьи [4].

Найдем якобиан отображения (2) в точках $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = (B^k + kxB^{k-1}B'_x)(B^k + kyB^{k-1}B'_y) - k^2xyB^{2(k-1)}B'_yB'_x =$$

$$= B^{2k} + kB^{2k-1}(xB'_x + yB'_y) = B^{2k} + k(n+1)B^{2k} = 0.$$

Лемма 1. *Якобиан отображения* (2) *равен нулю во всех точках* $(x,y)\neq(0,0)$.

Докажем, что отображение (2) разрывно в точке $(0,0)$.

$$\lim_{y\to0} u(0,y) = \lim_{y\to0} 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to+0} u(x,0) = \lim_{x\to+0} \frac{x}{(-xM(x,0))^{1/(n+1)}} = \frac{1}{(-M(1,0))^{1/(n+1)}} \neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{y\to0} u(0,y) \neq \lim\limits_{x\to+0} u(x,0)$, то $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ не существует.

Лемма 2. *Точка* $(0,0)$ *есть точка разрыва отображения* (2).

Считая, что $u(0,0)=0$, выясним, существует ли у функции $u(x,y)$ частная производная по переменной x в точке $(0,0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0} \frac{(-M(1,0))^k}{|\Delta x|} = \infty.$$

Лемма 3. *Функция* $u(x,y)$ *не имеет частной производной по переменной* x *в точке* $(0,0)$.

Литература

1. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Высшая школа, 1967.

2. Ильяшенко Ю. С. *Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр–фокус* // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6. № 3. С. 30–37.

3. Żołądek H., Llibre J. *The Poincaré center problem* // Journal of Dynamical and Control Systems. 2008. Vol. 14. № 4. P. 505—535.

4. Маханек М. М. *Предельные циклы системы Дарбу* // Весці АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 1. С. 6–11.

5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. *Уравнение Дарбу и его аналоги.* Гродно: ГрГУ, 1985.

6. Еругин Н. П. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.* Минск: Наука и техника, 1979.

THE METHOD OF FIELD CHARACTERISTICS FOR AUTONOMOUS SYSTEMS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

D. S. Zhalukevich

Let us consider an autonomous system of the 2-nd order [1]:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (x, y) \in G \subseteq \Re^2. \tag{1}$$

The matrix of the system (1) has the form

$$A_1 = \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

the determinant of the matrix (3) will be equal to

$$J_1 = detA_1 = P_x Q_y - P_y Q_x. \tag{3}$$

We introduce the notation

$$\vec{v} = \hat{T}\vec{r}, \quad \vec{a} = \hat{T}\vec{v}, \quad \vec{w} = \hat{T}\vec{a}, \tag{4}$$

where $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\hat{T} = \dfrac{d}{dt} = \vec{v}\cdot\nabla$, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.
Differentiating the system (1) in time, we get the system

$$\ddot{x} = F_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = F_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{5}$$

where

$$F_1 = \dot{P} = \vec{v}\cdot\nabla P, \quad F_2 = \dot{Q} = \vec{v}\cdot\nabla Q. \tag{6}$$

Differentiating the system (5) in time, we get the system

$$\dddot{x} = \Phi_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \quad \dddot{y} = \Phi_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}), \tag{7}$$

where

$$\Phi_1 = \dot{F_1} = \ddot{P} = \vec{a}\cdot\nabla P + \vec{v}\cdot\nabla F_1, \quad \Phi_2 = \dot{F_2} = \ddot{Q} = \vec{a}\cdot\nabla Q + \vec{v}\cdot\nabla F_2. \tag{8}$$

The determinant of an arbitrary order can be written through Poisson brackets

$$J_k = detA_k = -\{P^{(k-1)}, Q^{(k-1)}\}, \tag{9}$$

where

$$P^{(0)} = P, \quad Q^{(0)} = Q, \qquad P^{(k-1)} = \frac{d^{(k-1)}P}{dt^{(k-1)}}, \quad Q^{(k-1)} = \frac{d^{(k-1)}Q}{dt^{(k-1)}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Definition 1. *The matrix of system (1) is called primary, system (5) secondary and system (7) tertiary.*

Theorem 1. *For a stationary plane field of the system (1), the connections between the primary, secondary and tertiary matrices have the form*

$$A_2 = A_1^2 + \vec{v}\cdot\nabla A_1, \tag{10}$$

$$A_3 = A_1 A_2 + A_2 A_1 + \vec{v}\cdot\nabla A_2 + \vec{a}\cdot\nabla A_1. \tag{11}$$

It can be seen from (10) and (11) that at the equilibrium point $\vec{v}_0 = 0$ and $\vec{a}_0 = 0$ the determinants of the secondary and tertiary matrices will be equal $J_2 = J_1^2$, $J_3 = 2J_1J_2$. Let's introduce the notation [2]

$$\sigma_1 = TrA_1 = \nabla \cdot \vec{v}, \quad \sigma_2 = TrA_2 = \nabla \cdot \vec{a}, \quad \sigma_3 = TrA_3 = \nabla \cdot \vec{w}, \tag{12}$$

$$\vec{\rho}_1 = \nabla \times \vec{v} = \rho_1\vec{k}, \quad \vec{\rho}_2 = \nabla \times \vec{a} = \rho_2\vec{k}, \quad \vec{\rho}_3 = \nabla \times \vec{w} = \rho_3\vec{k}, \tag{13}$$

where TrA_1, TrA_2 and TrA_3 are traces of the primary, secondary and tertiary matrices. The expression σ_1 is called the continuity equation, and $\vec{\rho}_1$ the velocity vortex (vorticity) [3]. Flows and circulations of arbitrary order are related by expressions

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k^{(1)} = \sigma_1^{(k)}, \quad \rho_{k+1} = \rho_k^{(1)} = \rho_1^{(k)}, \tag{14}$$

where

$$\sigma_1^{(k)} = \frac{d^{(k)}\sigma_1}{dt^{(k)}}, \quad \rho_1^{(k)} = \frac{d^{(k)}\rho_1}{dt^{(k)}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

The characteristic equations for the primary, secondary and tertiary matrices have the form

$$\lambda_{kl}^2 - \sigma_k\lambda_{kl} + J_k = 0, \quad D_k = \sigma_k^2 - 4J_k, \tag{15}$$

where

$$k = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{1, 2}.$$

Definition 2. *The values $\sigma_k, J_k, D_k, \rho_k$ are called for primary, secondary and tertiary characteristics of a stationary plane field of the system (1).*

Theorem 2. *For a stationary plane field of the system (1), the relations between the primary, secondary and tertiary characteristics of the field have the form [2]*

$$\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2J_1 + \vec{v} \cdot \nabla\sigma_1, \tag{16}$$

$$\rho_2 = \sigma_1\rho_1 + \vec{v} \cdot \nabla\rho_1, \tag{17}$$

$$\sigma_3 = 2\sigma_1\sigma_2 - 2\dot{J}_1 + \vec{a} \cdot \nabla\sigma_1 + \vec{v} \cdot \nabla\sigma_2, \tag{18}$$

$$\rho_3 = \sigma_2\rho_1 + \sigma_1\rho_2 + \vec{a} \cdot \nabla\rho_1 + \vec{v} \cdot \nabla\rho_2, \tag{19}$$

where

$$\dot{J}_1 = \sigma_1 J_1 + \vec{v} \cdot \nabla J_1.$$

The expression (16) is called the stationary flow equation, and (17) is called the stationary vortex equation [3].

Refrences

1. Andronov A. A., Vitt A.A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Moscow, 1966.
2. Jackson. J. D. *Classical Electrodynamics*. USA, 1998.
3. Milne-Thomson L. M., *Theoretical Hydrodynamics*. England, 1968.

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В.В. Альсевич, П.А. Петрович

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \max_{y \in Y} \varphi(x(t^*), y) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad t \in T = [0, t^*], x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, U – выпуклый компакт,

$$f(x,u) = f_0(x) + B(x)u, \tag{4}$$

y – некоторый параметр с областью задания Y, где Y – компакт из $\mathbb{R}^m$.

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(\tau) = u(t), \quad \tau \in [t, t+h[, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, ..., t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h.

Дискретные управляющие воздействия естественны с прикладной точки зрения, поскольку при решении нетривиальных задач неизбежно использование вычислительных устройств дискретного действия.

Следует отметить, что до настоящего времени для различных критериев качества и систем управления, как обыкновенных, так и с запаздыванием, в классе дискретных управлений получены условия оптимальности в виде квазимаксимума для систем с произвольной функцией $f(x,u)$ и дискретного принципа максимума с функцией вида (4) (см., напр., [1-5]). Однако в указанных работах исследовались гладкие задачи управления. В предлагаемом сообщении приводится дискретный принцип максимума для минимаксного критерия качества (1). В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий условия оптимальности для задачи (1)-(3) с произвольной функцией $f(x,u)$ приведены в [6, 7].

Будем предполагать, что функции $f_0(x), B(x)$, $\varphi(x,y)$ непрерывно дифференцируемы по x.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, – допустимое управление в задаче (1)-(4), $x^0(t)$, $t \in T$, – соответствующее решение системы (2). Обозначим $H(t,y) = H(x^0(t), \psi(t,y), u^0(t)) = \psi'(t,y) f(x^0(t), u^0(t))$. Здесь $\psi(t,y)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t,y) = -\frac{\partial H(t,y)}{\partial x}, \quad t \in T, \tag{5}$$

$$\psi(t^*, y) = -\frac{\partial\varphi(x^0(t^*), y)}{\partial x}. \tag{6}$$

Введем множество

$$Y_0 = \{y \in Y : \varphi(x^0(t^*), y) = \max_{\overline{y}\in Y} \varphi(x^0(t^*), \overline{y})\}.$$

Очевидно, Y_0 – компакт.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема (дискретный принцип максимума). *Если* $u^0(t)$, $t \in T$, *– оптимальное управление в задаче* (1)-(4), *то вдоль него и соответствующих решений* $x^0(t)$, $t \in \in T$, *прямой системы* (2) *и* $\psi(t, y)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (5), (6) *выполняется условие*

$$\min_{y\in Y_0} \int\limits_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s, y), u^0(t))ds = \max_{u\in U} \min_{y\in Y_0} \int\limits_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s, y), u)ds, \quad t \in T_h. \tag{7}$$

Заметим, что в силу вида (4) функции $f(x, u)$ условие (7) можно представить в следующей форме:

$$\max_{u\in U} \min_{y\in Y_0} \Big(\int\limits_t^{t+h} \psi^{'}(s, y)B(x^0(s))ds\Big)(u - u^0(t)) = 0, \quad t \in T_h. \tag{8}$$

Аналогичный результат получим и для системы с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(x(t), z(t), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(t) = \gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0], \tag{9}$$

в которой $z(t) = x(t-\alpha)$, $\alpha > 0$ – запаздывание, $\gamma(t), \quad t \in [-\alpha, 0]$, – заданная функция, $f(x, z, u) = f_0(x, z) + B(x, z)u$. Только в этом случае в условии (8) $B(x^0(s))$ примет вид $B(x^0(s), z^0(s))$, а функция $\psi(t, y)$, $t \in T$, является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t, y) = -\frac{\partial H(t, y)}{\partial x} - \delta_{[0,t^*-\alpha[}(t)\frac{\partial H(t + \alpha, y)}{\partial z}, \quad t \in T, \tag{10}$$

с граничным условием (6), где $\delta_\omega(t) = 1$, если $t \in \omega$, $\delta_\omega(t) = 0$, если $t \notin \omega$, $H(t, y) = = H(x^0(t), z^0(t), \psi(t, y), u^0(t)) = \psi^{'}(t, y)f(x^0(t), z^0(t), u^0(t))$. В системе (9) запаздывание может быть переменным. В этом случае очень усложняется сопряженная система (10).

Отметим также, что в каждой из указанных задач сами траектории систем (2) или (9) могут зависеть от параметра y , т.е. $f = f(x, u, y)$, $x(0, y) = x_0(y)$ в системе (2), $f = f(x, z, u, y)$, $x(t, y) = \gamma(t, y), \quad t \in [-\alpha, 0]$ в системе (9). В этом случае необходимо потребовать непрерывность всех указанных функций и по параметру y .

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С. *Методы оптимизации.* Минск: Четыре четверти, 2011.

2. Габасов Р., Альсевич В.В., Русакова Д.В. *Оптимизация непрерывных динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Междунар. конф. Минск, 1—5 окт. 2013 г. Мн.: БГУ. 2013. С. 103–105.

3. Альсевич В.В. *Оптимизация непрерывных систем в классе дискретных управляющих воздействий* // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): Матер. междунар. науч.

конф., посвящ. 95-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 16–20 сент. 2019 г.). Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2019. С. 28—31.

4. Альсевич В.В. *Условия оптимальности в задаче управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы, в классе дискретных управляющих воздействий* // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: Матер. Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения профессора О.В. Васильева. Иркутск, 7–11 окт. 2019 г. Сб. трудов. Иркутск: Иркутский государственный университет. 2019. С. 195—198.

5. Альсевич В.В. *Условия оптимальности для задач оптимального управления в классе дискретных управляющих воздействий* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 10–16.

6. Альсевич В.В. *Задача терминального управления с недифференцируемым критерием качества* // Дифференц. и интегр. уравнения. Иркутск. 1973. Вып. 2. С. 81–87.

7. Альсевич В.В. *Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 8. С. 1384–1391.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОКАЗАТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.С. Баландин

Для автономных дифференциальных уравнений с последействием получено довольно много необходимых и достаточных признаков экспоненциальной устойчивости, и построены области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров исходного уравнения. Но во всех этих критериях задаётся только знак показателя экспоненты. В [1, 2] для различных уравнений запаздывающего типа найдены точные оценки показателя степени. В данной работе рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнений нейтрального типа

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum\limits_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\left(t-h_j\right) = \int\limits_0^{\upsilon} x(t-s)\,dr(s), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \dot{\varphi}(\xi), \quad \xi < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $h_j, \upsilon \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\upsilon] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$. Интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Положим

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{J} a_j \left(\tilde{S}_{h_j}\dot{\varphi}\right)(t) + \int\limits_t^{\upsilon} \left(\tilde{S}_{\xi}\varphi\right)(t)\,dr(\xi), \quad \left(\tilde{S}_h y\right)(t) = \begin{cases} 0, & t-h \geqslant 0, \\ y(t-h), & t-h < 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное нормированное пространство измеримых на множестве $[0,\tau]$ функций, $\tau = \max\{h_1, \ldots, h_J, \upsilon\}$.

Уравнение (1) назовём *экспоненциально устойчивым* если существуют такие $K, \gamma > 0$, что при любом $\sigma \in \mathcal{X}$ и любом $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения (1) имеет оценку:

$$|x(t)| \leqslant K e^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\sigma\|_{\mathcal{X}}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Через I обозначим единичный (тождественный) оператор, через S_h следующий оператор, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases} \quad S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (Ty)(t) = \int\limits_0^{\upsilon} \left(S_{\xi} y\right)(t)\,dr(\xi),$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$(I-S)\dot{x}(t)=(Tx)(t)+\sigma(t),\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) назовём абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, удовлетворяющую (3) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно (см. [3, с. 84, теорема 1.1], [4]), уравнение (3) с заданным начальным условием $x(0)\in\mathbb{R}$ однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t)=X(t)x(0)+\int\limits_0^{\tau}Y(t-s)\sigma(s)\,ds,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где $X\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, $Y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (3). Функции X и Y доопределим нулём на отрицательной полуоси.

Из формулы формулы (4) следует, что различные свойства (асимптотическое поведение, положительность и т.п.) решений уравнения (3) определяются фундаментальным решением и функцией Коши уравнения (3).

Функция X определяется как решение однородного уравнения вида (3)

$$\dot{x}(t)-(S\dot{x})(t)=(Tx)(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

дополненного начальным условием $x(0)=1$.

Функция Y, в отличие от фундаментального решения, не может быть решением дифференциального уравнения. Однако в работе [4] установлена связь между X и Y:

$$X(t)=(I-S)Y(t). \tag{5}$$

Для X и Y рассмотрим следующие оценки:

$$|Y(t)|\leqslant M_1e^{-\gamma t}, \tag{6}$$

$$|X(t)|\leqslant M_2e^{-\gamma t},\quad M_1,M_2,\gamma>0. \tag{7}$$

Очевидно, что в силу равенства (5) из оценки (6) вытекает оценка (7).

Пусть

$$\alpha=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln|Y(t)|}{t}<\infty.$$

Будем называть число α (строгим) верхним показателем функции Y.

Обозначим через Γ множество чисел $\gamma\in\mathbb{R}$, для которых справедлива оценка (6). Назовём число $\omega\triangleq\sup\{\gamma\colon\gamma\in\Gamma\}$ *точным показателем* функции Коши.

Теорема 1. *Если для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка* (6) *с показателем экспоненты* $\gamma>0$, *то для любого решения уравнения* (3) *выполняется оценка* (2).

Теорема 2. *Точный показатель функции Коши уравнения* (3) *равен* ω *тогда и только тогда, когда верхний показатель функции Коши уравнения*

$$\dot{y}(t)-\sum_{j=1}^{J}a_je^{\omega h_j}\dot{y}\,(t-h_j)=\omega y(t)-\sum_{j=1}^{J}a_j\omega e^{\omega h_j}y\,(t-h_j)+\int\limits_0^{v}e^{\omega s}y(t-s)\,dr(s),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

равен нулю.

Теорема 2 предлагает схему для нахождения точного показателя уравнения (3). В [5] изучается точный показатель решения для двух уравнений нейтрального типа.

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Литература

1. Malygina V. V. *On sharp estimation of the exponent of solutions to some classes of functional differential equations* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. V. 87. P. 99–110.

2. Sabatulina T., Balandin A. *On the exact estimation for the exponent of solutions of one equation with distributed delay* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. V. 87. P. 153–163.

3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

4. Баландин А. С. *О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 1. С. 13–25.

5. Баландин А. С. *О точной оценке показателя решений линейного автономного дифференциального уравнения нейтрального типа* // Вторая конференция математических центров России, 7-11 ноября 2022 г. Москва : Изд-во Моск. ун-та. 2022. С. 27–29.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ КРАТНОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ МАКСИМАЛЬНО ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Булатов

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [0, +\infty[, A$ и B - соответственно $n \times n$ и $n \times r$ матрицы.

Замыкание системы (1) регулятором типа линейной обратной связи

$$u(t) = Qx(t), \tag{2}$$

где $Q - r \times n-$ матрица, приводит к системе

$$\dot{x}(t) = (A + BQ)x(t), \tag{3}$$

спектром которой является множество Λ корней (с учетом их кратностей) характеристической функции

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda E - A - BQ). \tag{4}$$

Из $[1]-[3]$ следует, что, во-первых, для любого регулятора (2) многочлен (4) делится без остатка на многочлен $\varphi(\lambda)$, являющийся наибольшим общим делителем миноров $n-$ го порядка $\lambda-$ матрицы $P(\lambda) = [\lambda E - A; B]$, и, во-вторых, среди всех таких делителей многочлена $\delta(\lambda)$ рассматриваемый многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет наибольшую степень. Корни (с учетом их кратностей) многочлена $\varphi(\lambda)$ составляют максимально инвариантное множество M спектров Λ систем (3).

Справедлива следующая

Теорема. *Кратность l числа $\lambda_0 \in M$ равна дефекту* [3] *матрицы $G = [H; (\lambda_0 E - A)^n]$, т.е.*

$$l = n - rankG,$$

где $H = [B; AB; \ldots; A^{n-1}B]$.

Литература

1. Булатов В. И. *Влияние обратной связи на спектр линейной системы* // Вестник БГУ. Сер.1. 1977. С. 81-82.

2. Булатов В. И. *Задачи модального управления* // Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд.физ.-мат. наук. Мн. 1981.

3. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц* // М.: 1988.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НАРУШЕНИЕМ УСЛОВИЯ ОБЩНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ

М.Н. Гончарова

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается системой уравнений второго порядка

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & \lambda_1 x_1 + v_1, \\ \dot{x}_2 & = & \lambda_2 x_2 + v_2, \end{array} \right. \tag{1}$$

где управление $(v_1; v_2)$ является векторной кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения из четырехугольника V. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта V обозначим через U.

Множество всех точек фазового пространства, в которых объект (1) находится в момент времени t, в момент времени t_1 попадает в начало координат O с помощью некоторого управления из множества U, называется множеством управляемости объекта (1) в начало координат. Это множество обозначим через $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$. Момент времени t_1 считаем фиксированным. Рассмотрим задачу построения множества управляемости $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$ для произвольного момента времени t.

Будем считать, что выполняются неравенства $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Вершины четырехугольника V обозначим через $C_i, i = \overline{1, 4}$, обходя контур четырехугольника против часовой стрелки. Координаты вершины C_i обозначим через C_{i1}, C_{i2}. Примем, что выполняются следующие соотношения:

$$C_{11} > 0, C_{12} > 0, C_{21} < 0, C_{22} > C_{12}, C_{31} < C_{21},$$
$$C_{32} < 0, C_{41} > 0, C_{42} = C_{32}, C_{41} < C_{11}.$$

Замечание 1. В сделанных предположениях начало координат принадлежит множеству V, но не является его вершиной. Три стороны четырехугольника V не параллельны осям координат, но сторона, соединяющая вершины C_3 и C_4, параллельна оси Ox_1. Поэтому условие общности положения не выполнено.

Теорема. *Множество* $Y(t, t_1, \{O\}, U, R^2)$ *ограничено линиями*

$$\begin{array}{l} x_1(\eta) = \frac{C_{31}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{41} - C_{31}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{32}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} - \frac{C_{42}}{\lambda_2}, \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{l} x_1(\eta) = \frac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{41} - C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{12}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{42} - C_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta - \tau)} - \frac{C_{42}}{\lambda_2}, \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{l} x_1(\eta) = \frac{C_{11}}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 \tau} + \frac{C_{21} - C_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1(\eta - \tau)} - \frac{C_{21}}{\lambda_1}, \\ x_2(\eta) = \frac{C_{12}}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \tau} + \frac{C_{22} - C_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2(\eta - \tau)} - \frac{C_{22}}{\lambda_2}, \end{array} \tag{4}$$

$$x_1(\eta) = \frac{C_{31}}{\lambda_1}e^{-\lambda_1\tau} + \frac{C_{21}-C_{31}}{\lambda_1}e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{21}}{\lambda_1},$$
$$x_2(\eta) = \frac{C_{32}}{\lambda_2}e^{-\lambda_2\tau} + \frac{C_{22}-C_{32}}{\lambda_2}e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{22}}{\lambda_2}, \qquad (5)$$

где $\tau = t_1 - t$, *параметр* $\eta \in [0;\tau]$.

Доказательство теоремы основано на процедуре восстановления выпуклого множества управляемости по его опорной функции. Известно [1], что опорная функция множества $Y(t,t_1,\{O\},U,R^2)$ в направлении вектора ψ определяется равенством

$$c(Y(t,t_1,\{O\},U,R^2),\psi) = \int\limits_t^{t_1} c(V,e^{(t-s)A^*}(-\psi))ds,$$

где через A^* обозначена матрица, транспонированная к матрице A, матрица A составлена из коэффициентов при фазовых переменных системы, описывающей поведение объекта. Заметим что, в силу нарушения условия общности положения для некоторых векторов ψ опорное множество множества V состоит более, чем из одной точки.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального быстродействия, в которой поведение объекта снова описывается системой (1), а область управления является четырехугольником $\tilde{V}$ с вершинами $C_i, i=1,2,4, \tilde{C}_3 = (\tilde{C}_{31};\tilde{C}_{32})$, где координаты вершин $C_i, i = 1,2,4$, совпадают с координатами вершин четырехугольника V, координаты $\tilde{C}_{31},\tilde{C}_{32}$ определяются равенствами $\tilde{C}_{31} = C_{31} + \epsilon\frac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}$, $\tilde{C}_{32} = C_{32} + \epsilon$, где $0 < \epsilon < |C_{32}|$. При таком построении множества $\tilde{V}$ вершина $\tilde{C}_3$ принадлежит ребру четырехугольника V, соединяющему вершины C_2 и C_3. Множество векторных кусочно-непрерывных функций, принимающих значения из компакта $\tilde{V}$ обозначим через $\tilde{U}$.

Очевидно, что в задаче быстродействия для объекта (1) с областью управления $\tilde{V}$ условие общности положения будет выполненным.

Проведя вычисление интеграла $\int\limits_t^{t_1} c(\tilde{V},e^{(t-s)A^*}(-\psi))ds$ для восьми различных случаев, получаем опорную функцию $c(Y(t,t_1,\{O\},\tilde{U},R^2),\psi)$. Восстанавливая выпуклое множество по его опорной функции, получим, что множество $Y(t,t_1,\{O\},\tilde{U},R^2)$ ограничено линией

$$x_1(\eta) = \left(\frac{C_{31}}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\frac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}\right)e^{-\lambda_1\tau} + \left(\frac{C_{41}-C_{31}}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\frac{C_{31}-C_{21}}{C_{32}-C_{22}}\right)e^{\lambda_1(\eta-\tau)} - \frac{C_{41}}{\lambda_1},$$
$$x_2(\eta) = \frac{C_{32}+\epsilon}{\lambda_2}e^{-\lambda_2\tau} + \frac{C_{42}-C_{32}-\epsilon}{\lambda_2}e^{\lambda_2(\eta-\tau)} - \frac{C_{42}}{\lambda_2}, \qquad (6)$$

где $\eta \in [0;\tau]$ и линиями (3)-(5). Переходя в уравнениях (6) к пределу при $\epsilon \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Замечание 2. Линия (2) параллельна оси Ox_1.

Полученный результат можно использовать при построении множества управляемости рассматриваемого объекта в произвольную точку фазового пространства, а также в процессе построения множества управляемости при наличии фазовых ограничений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ "Конвергенция-2025", задание 1.2.04).

Литература

1. Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения* // М.: МАКС Пресс, 2007.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫПУСКОВ ТОВАРОВ ДЛИТЕЛЬНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Н.М. Дмитрук, М.М. Вабищевич

В докладе исследуется задача фирмы, которая планирует выпуск товаров длительного пользования, замену старых версий новыми и выбирает оптимальную цену каждого поколения товара. Постановка задачи следует работе [1], где она решается численно, а качественный анализ проведен только для магистралей в задаче выпуска одного поколения. Самое интересное, однако, происходит на начальных этапах функционирования фирмы, поэтому цель настоящего сообщения — обосновать решение на основе принципа максимума [2].

Задача фирмы формулируется как задача оптимального управления, в которой переменными состояния выступают объем рынка потенциальных покупателей $Q(t)$ и капитал $K(t)$, а управлениями — объем продаж $q(t)$ и инвестиции $I(t)$ в момент времени t, $t \geq 0$. В момент $t = 0$ заданы начальные объемы рынка Q_0 и капитала K_0. Предполагается, что каждый покупатель приобретает одну единицу товара длительного пользования и покидает рынок. Тогда динамическая модель имеет вид

$$\dot{Q}(t) = -q(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \; K(0) = K_0, \tag{1}$$

где $\delta \in (0,1)$ — норма амортизации.

Ограничения учитывают, что все переменные должны быть неотрицательными: $Q(t) \geq 0$, $K(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Кроме того, вводятся смешанные ограничения

$$q(t) \leq K(t), \quad q(t) \leq \alpha Q(t) - \varphi p(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

которые означают, что продажи не могут превышать производственные мощности, т.е. $K(t)$, а также спрос со стороны покупателей, который выражается функцией $d(Q,p) = \alpha Q - \varphi p$, где $p > 0$ — цена товара, а параметры $\alpha, \varphi > 0$ — параметры функции спроса.

Задача фирмы состоит в определении программы продаж $q(t)$, $t \geq 0$, и инвестиций $I(t)$, $t \geq 0$, а также цены p, при которых общая дисконтированная прибыль фирмы

$$\max_{p,q,I} \int\limits_0^\infty e^{-rt} \left[(p-c)q(t) - I(t) - \frac{\theta}{2} I(t)^2 \right] dt \tag{3}$$

будет максимальной. Здесь $r > 0$ — норма дисконтирования, $c > 0$ — затраты на производство единицы продукции, $I + \theta I^2/2$ — квадратичная функция капитальных издержек.

Задача (1) – (3) — базовая задача фирмы, в которой выпускается только одно поколение товара. Ее решение строится в два этапа. Сначала фиксируется цена товара p, тогда задача (1) – (3) становится линейно-квадратичной, с вогнутой функцией в критерии качества. Для ее решения применяются достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума из работы [3]. Было установлено, что оптимальное решение состоит из трех участков (дуг): на первом участке капитал растет за счет инвестиций, продажи равны выпуску продукции ($q = K$); на втором — инвестиции прекращаются ($I = 0$), капитал начинает уменьшаться, но продажи по-прежнему равны выпуску ($q = K$), на третьем — инвестиций нет, продажи равны спросу ($q = d(Q,p)$). При этом установлено, что переход с дуги 2 на дугу 3 происходит в момент t_d, когда $K(t_d) = \alpha Q(t_d) - \varphi p$. Переход с дуги 1 на дугу 2 определяется условиями, связанными с сопряженными переменными. Если $V(p, Q_0, K_0)$ — оптимальное значение задачи при фиксированных цене и начальных условиях Q_0, K_0, то решение задачи максимизации функции одной переменной $V(Q_0, K_0) = \max_{p>0} V(p, Q_0, K_0)$, на втором этапе дает решение задачи (1) – (3). На рис. 1 представлены результаты для следующих значений параметров $r = 0.01$, $\alpha = 1$, $c = 20$, $\varphi = 10$, $\delta = 0.05$, $\theta = 1$, $Q_0 = 1000$, $K_0 = 0$.

Далее исследуется случай, когда фирма планирует выпустить $N + 1$, $N > 1$, поколение товара. Фирма выбирает моменты внедрения T_i и цену p_i каждого нового поколения товара оптимальным образом, $i = \overline{1, N}$. На промежутке времени $[T_{i-1}, T_i]$ фирма выпускает i-ое поколение ($T_0 = 0$), на промежутке $[T_N, +\infty)$ выпускается последнее, $(N + 1)$-ое поколение товара, его цена равна p_{N+1}. Затраты на запуск $(i + 1)$-го поколения обозначаются S_i. Они отражают исследовательские, маркетинговые издержки по разработке и выпуску новой версии. Когда фирма выводит на рынок новую версию товара, количество потенциальных покупателей резко возрастает: $Q(T_i) = Q_i > Q(T_i - 0)$. В то же время производственные мощности, которые использовались для выпуска предыдущего поколения, могут использоваться лишь частично: $K(T_i) = \beta K(T_i - 0)$, $i = \overline{1, N}$, где β — доля сохраняемого капитала.

В силу сделанных предположений рассматриваемая задача имеет вид

$$\max_{T,p,q,I} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{T_{i-1}}^{T_i} e^{-rt} \left[(p_i - c)q(t) - I(t) - \frac{\theta}{2} I(t)^2 \right] dt - e^{-rT_i} S_i \right) + e^{-rT_N} V(Q_N, K_N) \right\}, \tag{4}$$

$$\dot{Q}(t) = -q(t), \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \quad Q(T_{i-1}) = Q_{i-1}, \quad K(T_{i-1}) = K_{i-1}, \quad K_i = \beta K(T_i - 0),$$
$$0 \le q(t) \le K(t), \quad q(t) \le \alpha Q(t) - \varphi p(t), \quad I(t) \ge 0, \quad t \in [T_{i-1}, T_i[, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для решения задачи (4) используются результаты решения базовой задачи (1) – (3), рассуждения динамического программирования и оптимизация по моментам времени T_i. На рис. 2 представлены результаты решения для 3 поколений товара для данных приведенных выше и, дополнительно при $\beta = 0.5$, $Q_i = 1.1Q_{i-1}$, $S_i = 5000$, $i = 1, 2$.

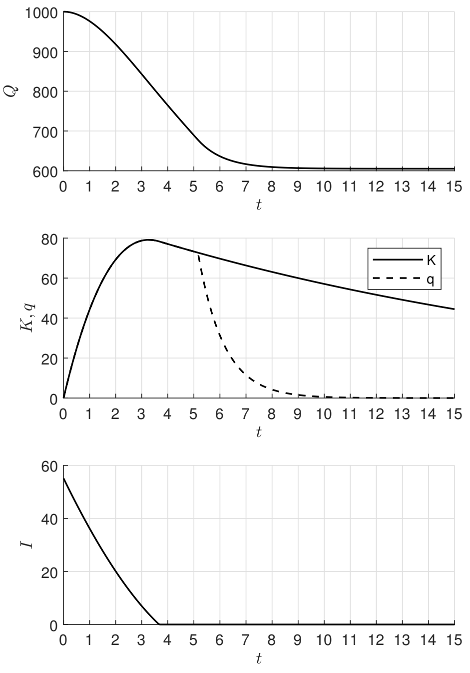


Рис. 1. Решение задачи (1) – (3)

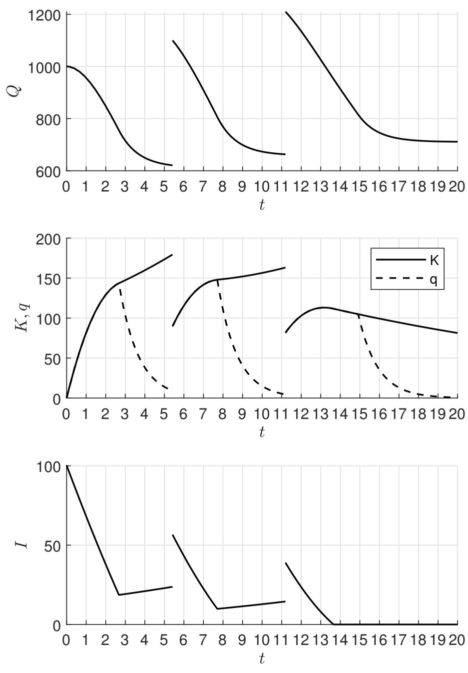


Рис. 2. Решение задачи (4)

Литература

1. Seidl A., Hartl R. F., Kort P. M. *A multi-stage optimal control approach of durable goods pricing and the launch of new product generations* // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 207–220.

2. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления.* М.: Наука, 1966.

3. Габасов Р., Габасова О. Р., Дмитрук Н. М. *Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 100–117.

МИНИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВОЛЬТЕРРА

М.П.Дымков, В.В.Горячкин

Особый интерес привлекают дискретные системы с последействием, существенной особенностью которых является зависимость состояний системы от предыстории процесса [1, 2]. Среди таких систем особое место занимают системы уравнений Вольтерра, у которых состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. Рассмотрим систему уравнений вида

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)x(t-j) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0, 1, ..., N-1. \tag{1}$$

Здесь $A_j(t)$ и $B(t)$ заданные $(n \times n)$ и $(n \times m)$ вещественные матрицы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $-n-$ вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ $-m-$ вектор управления в момент t. Требуется на решениях системы управления (1) минимизировать функционал качества вида

$$J(u) = \sum_{t=1}^{N} [(Q(t)x(t), x(t)) + (R(t-1)u(t-1), u(t-1))] \to \min_{u(\cdot)}, \tag{2}$$

где $Q(t), R(t), t = 0, 1, ..., N$ заданные симметрические неотрицательно определенные $(n{\times}n)$ и положительно определенные невырожденные $(m{\times}m)$ матрицы, соответственно.

Определение 1. Функцию $u(t),\ t = 1, ..., N-1$ будем называть допустимым управлением, если $u = (u(0), u(1), ..., u(N-1)) \in \mathbb{R}^{mN}$. Решением системы уравнений (1) при заданном допустимом управлении $u(t),\ t = 0, 1, ..., N-1$ назовем функцию $x(t), t = 1, ..., N$, которая удовлетворяет условию $x = (x(1), ..., x(N)) \in \mathbb{R}^{nN}$ и системе уравнений (1) при всех $t = 0, 1, ..., N-1$.

Лемма 1. *Решение $x = x(t, u, x_0), t = 1, ..., N$ системы уравнений (1) при заданных начальном условии x_0 и допустимом управлении $u(t),\ t = 0, 1, ..., N-1$ представимо в виде*

$$x(t) = F_0(t)x_0 + \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \quad t = 1, 2, ..., N, \tag{3}$$

где $(n \times n)$ матрицы $F_j(t)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$F_j(t) = \sum_{k=j}^{t-1} F_{k+1}(t)A_{k-j}(k), \quad F_j(j) = E, \quad j = 0, 1, ..., t, \quad t = 1, 2, ..., N,$$

где E – единичная $(n \times n)$ матрица.

Для исследования задач оптимизации в линейных дискретных системах управления, определенных на целочисленной решетке Z_+, оказалось удобным [3,4] их операторное представление в соответствующих гильбертовых пространствах последовательностей. Этот прием будем использовать и для решения задачи (1) – (2).

Определим оператор $L : \mathbb{R}^{mN} \to \mathbb{R}^{n(N+1)}$ формулой

$$(Lu)(t) = \sum_{j=0}^{t-1} F_{j+1}(t)B(j)u(j), \quad (Lu)(0) = 0, t = 0, 1, ..., N. \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Задача оптимизации (1)-(2) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$u^0 = -(\mathcal{R} + L^*\mathcal{Q}L)^{-1}L^*\mathcal{Q}\omega \tag{5}$$

где $L^* : \mathbb{R}^{n(N+1)} \to \mathbb{R}^{mN}$ оператор сопряженный к оператору L, $\omega = (F_0(0)x_0, F_0(1)x_0, ..., F_0(N)x_0)$, а операторы $\mathcal{R} : \mathbb{R}^{mN} \to \mathbb{R}^{mN}$ $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ определяются формулами

$$(\mathcal{R}u)(t) = R(t)u(t), \quad (\mathcal{Q}x)(t) = Q(t)x(t), \quad t = 1, .., N.$$

Полученное в теореме 1 выражение оптимального управления имеет операторный вид, что создает определенные трудности. По этой причине становится актуальной задача поиска более приемлемых форм представление оптимального решения.

Определим оператор $V : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ формулой

$$(V\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{t} A_j(t)\varphi(t-j), \quad t = 1, ..., N, \quad \varphi = (\varphi(1), ..., \varphi(N)) \in \mathbb{R}^{nN}.$$

Можно показать, что сопряженный оператор $V^* : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ задается формулой

$$(V^*\psi)(t) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t+k)\psi(t+k), \quad t = 1, ..., N, \quad \psi = (\psi(1), ..., \psi(N)) \in \mathbb{R}^{nN},$$

где $A_k^T(t)$ обозначает матрицу транспонированную с матрицей $A_k(t)$.

В соответствии с представлением сопряженного оператора V^* рассмотрим следующую систему уравнений

$$z(t-1) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t) z(t+k) + g(t), \quad t = N, N-1, ..., 1 \quad z(N) = 0, \tag{6}$$

которую будем называть сопряженной с исходной системой (1). Для представления решений сопряженной системы (6) введем $(n \times n)-$ матрицы $G_j(t)$, $t = N, N-1, ..., 1;$ $j = 0, 1, ..., t$ следующими рекуррентными формулами

$$G_{j+1}(t-1) = \sum_{k=0}^{N-t} A_k^T(t-1+k) G_{j-k}(t+k), \ t = N, N-1, ..., 1, \ G_0(t) = E, \ G_s(t) = \emptyset, s < 0,$$

где $E, \emptyset-$ $(n \times n)$ - единичная и нулевая, соответственно, матрицы.

В работе исследуется вопрос представления оптимального управления в виде функции переменных сопряженной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция - 2025".

Литература

1. Гайшун И. В., Дымков М. П. *Управляемость систем, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7, С. 88-100.

2. Kolmanovskii V. B., Castellanos-Velasco E. *Asymptotic properties of the solutions for some discrete Volterra equations* // Dynamic Systems and Applications. 2005. vol. 14(2). P.197-224.

3. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *A Volterra operator based observability theory for discrete linear repetitive processes* // Proceedings of VI -th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). Singapure, 8 pages. 2000.

4. Дымков М. П. *Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления.* Минск: БГЭУ, 2005.

КОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОГО ТИПА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.П. Жабко, В.С. Жигалов

Введение. В настоящее время не ослабевает актуальность исследования математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с линейно возрастающим запаздыванием. К таким моделям относятся, в частности, динамика автомобильного потока на КАД, модель информационного сервера, распространение эпидемии и др. В работе [1] рассматривалась стабилизация линейной системы с линейным пропорциональным запаздыванием. В настоящей работе изучается асимптотическая устойчивость нулевого решения неуправляемой системы дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием.

Рассмотрим систему уравнений с однородными правыми частями

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(\alpha t)), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где векторные функции $f(x)$ и $g(x)$ суть однородные порядка $\mu > 1$. Начальные условия задаются моментом времени t_0, вектором x_0 и начальной функцией $\phi \in PC\Big([\alpha t_0, t_0], R^n\Big), \phi(t_0) = x_0$.

Теорема 1 (Теорема Разумихина) [2]. *Если существует положительно определенная однородная порядка $\gamma > 2$ функция $V(y) \in C^2(R^n)$ и положительно определенная однородная порядка $k = \gamma + \mu - 1$ функция $W(y) \in C^1(R^n)$ такие, что на множестве кривых*

$$S_t = \left\{ x_t \in PC\Big([\alpha t, t], R^n\Big) \Big| \; V(x(\tau)) < kV(x(t)), k > 1, \tau \leq t, t \geq t_0 \geq 0 \right\}$$

справедливо неравенство

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T (f(x(t)) + g(x(\alpha t))) \leq -W(x(t)),$$

тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Следующая теорема дает возможность проанализировать устойчивость системы (1) при помощи аналогичной системы-прототипа без запаздывания.

Теорема 2 [2]. *Если вспомогательная система уравнений*

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) + g(y(t)) \tag{2}$$

асимптотически устойчива по Ляпунову, то нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно условие Ляпунова существования и единственности решения матричного уравнения Ляпунова $VA + A^T V = -W$ в виде симметрической матрицы V для любой симметрической матрицы W. В данном пункте рассматривается условие разрешимости уравнения

$$\left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T f(x) = W(x) \tag{3}$$

в виде однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$, если функции $f(x)$ и $W(x)$ суть однородные функции порядков $\mu > 1$ и $l = k + \mu - 1$ соответственно.

Далее будем считать функции $V(x)$, $f(x)$ и $W(x)$ положительно однородными, определенными в R^n, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. Тогда, если положить $t_0 = 0$, то существует единственное непрерывно дифференцируемое по своим переменным решение $x(t, x_0)$ вспомогательной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}\right)^T f(x).$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова для однородных функций, если для любой положительно однородной функции $W(x)$ порядка $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ существует решение уравнения (3) в виде положительно однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$.

Теорема 3. *Если система уравнений (4) имеет равновесное* $x(t, \tilde{x}_0) \equiv \tilde{x}_0 \neq 0$ *или периодическое* $x(L, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$ *решение, то функция* $f(x)$ *не удовлетворяет условию Ляпунова.*

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Ляпунова для положительно однородных функций.*

Если для некоторой точки $\tilde{x}_0 \neq 0$ *выполнено условие* $f(\tilde{x}_0) = \alpha(||\tilde{x}_0||)\tilde{x}_0$, *причем* $\alpha(||\tilde{x}_0||) \neq 0$, *или для некоторого решения* $x(t, \hat{x}_0)$ *уравнения (4) выполнено условие* $x(L, \hat{x}_0) = \alpha\hat{x}_0$, *причем* $\alpha \neq 1$, *то для любой положительно однородной функции* $W(x)$ *порядка* $l = k + \mu - 1$ $(k > 1, \mu > 1)$ *любые два решения* $\tilde{V}(x)$ *и* $\hat{V}(x)$ *уравнения (1) удовлетворяют равенствам*

$$\tilde{V}(\gamma\tilde{x}_0) = \hat{V}(\gamma\tilde{x}_0), \gamma \geq 0) \quad \text{или} \quad \tilde{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)) = \hat{V}(x(t, \gamma\tilde{x}_0)), \gamma \geq 0, t \in (-\infty, +\infty). \tag{5}$$

Из положительной однородности функций $\tilde{V}(x)$ и $\hat{V}(x)$ следуют равенства (5) при $\gamma \geq 0$.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4 для всех точек, то имеет место единственность решения уравнения (1).*

Заключение. В докладе рассматривается проблема устойчивости однородных дифференциально-разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. Обоснован подход к анализу устойчивости, основанный на теоремах Разумихина. Условие Ляпунова для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений распространено на однородные системы. Предложен подход к построению функционалов Ляпунова Красовского для однородных систем.

Литература

1. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. I. Линейные управляемые системы* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 3. С. 316–325.

2. Екимов А. В., Жабко А. П., Яковлев П. В. *Устойчивость дифференциально–разностных систем с линейно возрастающим запаздыванием. II. Системы с аддитивной правой частью* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 16. № 1. С. 4–9.

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

В.А. Зайцев, И.Г. Ким

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц над полем $\mathbb{K}$; $I \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ — единичная матрица; $\overline{a}$ означает комплексное сопряжение числа a; $*$ — эрмитово сопряжение матрицы.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с распределенным запаздыванием в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{0} dg_i(\tau) x^{(n-i)}(t+\tau) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} u_{\alpha}^{(n-l)}(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y_{\beta}(t) = \sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t), \quad \beta = \overline{1,k}, \tag{2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i : [-h, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $g_i \colon [-h, 0] \to \mathbb{K}$ — функции ограниченной вариации, $b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$.

Пусть управление в системе (1), (2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с распределенным запаздыванием

$$u(t) = \int_{-\sigma}^{0} dR(\tau) y(t+\tau), \tag{3}$$

$y(t) = 0$, $t < -h$. Здесь $R(\tau) = \{r_{\alpha\beta}(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta} \colon [-\sigma, 0] \to \mathbb{K}$ — функции ограниченной вариации, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$.

Определение 1. Для системы (1), (2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (3), если для любого числа $\omega \geq 0$ и любых функций ограниченной вариации $\delta_i \colon [-\omega, 0] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдутся целое число $\sigma > 0$ и матричная функция ограниченной вариации $R \colon [-\sigma, 0] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристическая функция замкнутой системы (1), (2), (3) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \int_{-\omega}^{0} d\delta_i(\tau) e^{\lambda\tau}.$$

Построим по системе (1), (2) матрицы $B = \{b_{l\alpha}\}$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, и $C = \{c_{\nu\beta}\}$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $b_{l\alpha} = 0$ при $l < p$ и $c_{\nu\beta} = 0$ при $\nu > p$. Пусть $J = \{\vartheta_{ij}\} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, где $\vartheta_{ij} = 1$ при $j = i+1$ и $\vartheta_{ij} = 0$ при $j \neq i+1$. Положим $J^0 := I$.

Теорема 1. *Для системы* (1), (2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (3) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^* J^0 B, \quad C^* J B, \quad \ldots, \quad C^* J^{n-1} B \tag{4}$$

линейно независимы.

Следствие 1. *Пусть матрицы* (4) *линейно независимы. Тогда система* (1), (2) *экспоненциально стабилизируема посредством регулятора* (3).

Полученные результаты развивают исследования задачи модального управления посредством статической обратной связи по выходу для дифференциального уравнения n-го порядка с запаздываниями, проведенные в работах [1]–[5].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays* // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 810–814.

2. Zaitsev V. A., Kim I. G. *Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 208–220.

3. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19.

4. Zaitsev V., Kim I. *Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays* // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 17. Article 2158.

5. Зайцев В. А., Ким И. Г. *Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу.* Ижевск: Удмуртский университет, 2022.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ НА НЕФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕННОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А.И. Калинин, Л.И. Лавринович

В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации квазилинейных динамических систем, содержащих малые параметры при нелинейностях, уделяется значительное внимание. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных динамических систем. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе. Критерий качества в этой задаче представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, x(t_0) = x_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = 0, J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + u^{\mathrm{T}} P(t)u)dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный момент времени, t_1 — нефиксированный конечный момент времени $(t_1 > t_0)$, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, – нелинейная вектор-функция, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geq t_0$.

Следует отметить, что если учесть в целевой функции только энергетические затраты, то задача с нефиксированным временем, как правило, не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in R^n$, $t \geq t_0$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$.

Определение Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in [t_0, t_1^{(N)}(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0,1,2,\dots$) в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В докладе предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N < < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Его суть состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления. Такими элементами в данной задаче являются конечный момент времени, а также начальные значения сопряженных переменных (в момент времени t_0), которые в силу принципа максимума [1] соответствуют оптимальному управлению. Эти определяющие элементы как функции малого параметра принадлежат классу C^p.

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$, и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче является вполне управляемой [2].

Заметим, что для стационарной динамической системы это предположение эквивалентно требованию

$$rank(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

При сделанном предположении в базовой задаче существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [1] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть t_1^0 – оптимальный конечный момент, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = [t_0, t_1^0]$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi,$$

что выполняются условия

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u^0(t) - u^{0^{\mathrm{T}}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in R^r}(\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)u - u^{\mathrm{T}}P(t)u), t \in T^0, \qquad (3)$$

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t_1^0)B^{\mathrm{T}}(t_1^0)u^0(t_1^0) - u^{0^{\mathrm{T}}}(t_1^0)P(t_1^0)u(t_1^0) = 1.$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = \frac{1}{2}P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t).$$

Вычислительная процедура при построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения базовой задачи, включает интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим, что при сделанных предположениях асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

А.М. Камачкин, В.В. Евстафьева, Д.К. Потапов

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \tag{1}$$

Здесь X – вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная невырожденная квадратная матрица n-го порядка с вещественными элементами, B – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – многозначная функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 ($l_1 < l_2$) и значениями выхода m_1, m_2 ($m_1 < m_2$), $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами. Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geq 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задается следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leq l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geq l_2$ – равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ ($t_1 < t \leq t_2$) – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение $(\Gamma, X) = l_i$ ($i = 1, 2$) определяет гиперплоскость, которую называют *поверхностью переключения* (далее поверхность L_i), поскольку в ее точках происходит переключение реле. Эти точки называют *точками переключения.*

Траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \tag{2}$$

склеивание которых происходит в точках переключения. Непрерывному периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X^*, удовлетворяющей равенствам $X^* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X^*) = l_i$ ($i = 1, 2$), где t_0 – начальный момент времени, T – период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X^*.

Будем рассматривать непрерывные периодические решения с траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий в силу систем (2), число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T. В силу решения системы (1) поверхность L_i (или ее подмножество) отображается в себя.

Непрерывный оператор P, отображающий некоторое связное компактное множество $S_i \subset L_i$ $(i = 1, 2)$ в себя в силу решения системы (1), представим в виде

$$P(X_0, T(X_0)) = e^{A(T(X_0)-t_0)} \left(X_0 + \int\limits_{t_0}^{T(X_0)} e^{-A(\tau - t_0)} BF(\sigma) d\tau \right), \tag{3}$$

где $X_0 = X(t_0)$ – начальная точка отображения, $X_0 \in S_i$, $T(X_0)$ – время возврата изображающей точки по траектории, задаваемой системой (1), в множество S_i.

Пусть существует периодическое решение $X(\cdot)$ системы (1) с $2k$ $(k \in \mathbb{N})$ точками переключения X^1, X^2, $\ldots$, X^{2k} в фазовом пространстве. Изображающая точка решения начинает движение в точке X^1 на поверхности L_1 в момент времени t_0 и достигает поверхности L_2 в точке X^2 в момент времени t_1 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_1$, затем переходит на L_1 в точку X^3 в момент времени t_2 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_2$ и так продолжает движение от L_1 к L_2 и обратно k раз. В момент времени t_{2k} изображающая точка возвращается на поверхность L_1 в начальную точку X^1 в силу системы (1) при $F(\sigma) = m_2$. Значит, $t_{2k} = T$.

Пусть имеют место неравенства

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \tag{4}$$

Неравенства (4) дают условие, при котором для систем (2) выполняется равенство $\dot{X} = 0$ в точке $X_i = -A^{-1}Bm_i$ $(i = 1, 2)$, лежащей в фазовом пространстве вне области между поверхностями переключения (т.е. вне зоны неоднозначности $F(\sigma)$).

Далее выпишем систему относительно точек и моментов времени переключения в соответствии с описанным выше поведением движения изображающей точки решения. Имеем

$$\begin{gathered}
(\Gamma, X^1) = l_1, \quad X^2 = e^{A(t_1 - t_0)} X^1 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1 - \tau)} Bm_1 d\tau, \\
(\Gamma, X^2) = l_2, \quad X^3 = e^{A(t_2 - t_1)} X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2 - \tau)} Bm_2 d\tau, \\
\ldots \\
(\Gamma, X^{2k}) = l_2, \quad X^1 = e^{A(t_{2k} - t_{2k-1})} X^{2k} + \int\limits_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k} - \tau)} Bm_2 d\tau.
\end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) описывает процесс отображения множества $S_1 \subset L_1$ в себя. Аналогично можно построить процесс отображения $S_2 \subset L_2$ в себя. При этом точка $X^j \in S_i$ $(j = \overline{1, 2k}$, $i = 1, 2)$ принадлежит траектории периодического решения.

Итак, система (5) для любого $k \in \mathbb{N}$ задает отображение множества S_1 в себя с оператором P, определенным формулой (3). Оператор P обозначим через P_2, если отображение множества S_1 в себя имеет два перехода в силу систем (2), через P_4, если четыре перехода и т.д. В результате получим семейство $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждый оператор которого соответствует отображению множества S_1 в себя. Если оператор P_{2k} имеет неподвижную точку, то существует периодическое решение системы (1) с $2k$ точками переключения в фазовом пространстве.

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам из семейства $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$.

В [1] получены условия существования неподвижных точек отображения, порожденного системой (1), единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений.

Данная работа развивает результаты из [1]. Нижеследующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки одновременно у всех возможных отображений, порождаемых системой (1).

Теорема. *Пусть в системе (1) матрица A имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (4). Семейство операторов $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geq 3$ выполняется равенство $(-1)^{n-2}\mathrm{sign} J_{P_2}(X_{fp}) = -1$, где X_{fp} – неподвижная точка отображения $P_2(X)$, $J_{P_2}(X_{fp})$ – якобиан отображения $P_2(X)$, вычисленный в точке X_{fp} .*

Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/.

Литература

1. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.

О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$; M_n – пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1}\|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_n евклидовой нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Для любого числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ и всякой матрицы $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in$ $\in \mathrm{M}_n$ через $H\{k\} \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее *главную ведущую подматрицу* порядка k [1, с. 30], т.е.

$$H\{1\} := h_{11} \in \mathrm{M}_1, \quad H\{2\} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2, \quad \ldots, \quad H\{n\} := H \in \mathrm{M}_n.$$

Главным ведущим (*угловым*) *минором k-ого порядка* квадратной матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ будем называть [1, с. 30] определитель ее ведущей главной подматрицы k-ого порядка, т.е. $\det H\{k\}$.

Определение 2. Возьмем любое число $\rho > 0$. Матрицу $H \in \mathrm{M}_n$ назовем *строго ρ-положительно регулярной*, если при всяком $i = \overline{1, n}$ имеют место неравенства $\det H\{i\} \geqslant \rho$.

Теорема. *При любых числах $r > 0$ и $\rho > 0$ и всякой матрице $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|H\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, найдутся величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$ и строго θ-положительно регулярные матрицы H_i, $i = \overline{1, 5}$, обеспечивающие равенство $H = \prod_{i=1}^{5} H_i$.*

Установленное разложение позволит доказать наличие свойства равномерной глобальной достижимости [2, 3] для равномерно вполне управляемой [4, 5] линейной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для равномерно вполне управляемой [6] дискретной линейной управляемой системы [7] с периодическими коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция-2025" (подпрограмма "Методы математического моделирования сложных систем задание 1.2.01 "Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений"(№ ГР 20211316)).

Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.

2. Зайцев, В. А., Тонков, Е. Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова* // Известия вузов. Математика. 1999. № 2(441). С. 60–67.

3. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Минск: Беларус. навука, 2012.

4. Kalman, R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. Pp. 102–119.

5. Тонков, Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной реккурентной системы* / Е.Л. Тонков // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

6. Babiarz A., Chornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. № 2. Pp. 671–692.

7. Гайшун И. В. *Системы с дискрентным временем.* Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СОСТАВНЫХ КАУЗАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Пусть на отрезке времени $[t_0, T]$ заданы промежуточные моменты $t_i, \quad 1 \le i \le m,$ такие, что $0 \le t_0 < t_1 < t_2, \ldots < t_{m-1} < t_m = T.$

Рассмотрим динамическую систему, определённую на отрезке $[t_0, T]$, которая на каждом промежутке времени $]t_{k-1}, t_k], \quad 1 \le k \le m,$ описывается системой вида

$$A_0 \dot{x}^{(k)}(t) = A_k x^{(k)}(t) + B_k u^{(k)}(t), \tag{1}$$

где $x^{(k)} \in R^n$ – фазовый вектор системы; $A_0, A_k \in R_{n,n}$, $B_k \in R_{n,l}$ – заданные матрицы; причём $\det A_0 = 0$; $u^{(k)} \in R^l$ – управление.

Будем считать, что система (1), на указанном промежутке времени является каузальной [1-3].

Составную систему, определённую на отрезке $[t_0, T]$, назовём каузальной, если на каждом промежутке времени $[t_{k-1}, t_k]$ система вида (1) является каузальной.

Пусть для составной каузальной системы заданы начальное состояние в момент t_0, т.е.

$$x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$$

и конечное состояние в момент T, т.е.

$$x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}.$$

Согласно [4] будем считать, что преемственность между системами (1) обеспечивается выполнение условия, что в промежуточные моменты времени t_k, $1 \le k \le m-1$, выполняются равенства

$$E_k x^{(k)}(t_k) + F_k x^{(k+1)}(t_k) = \beta_k, \tag{2}$$

где $E_k, F_k \in R_{n,n}$ – заданные матрицы, а $\beta_k \in R_{n,l}$ – заданный столбец. Кроме этого считаем, что матрица F_k является невырожденной, т.е. $\det F_k \ne 0$.

Определение 1. Составную каузальную систему с промежуточными условиями (2) назовём условно управляемой, если для любого начального состояния $x_0^{(1)}$ и любого конечного состояния $x_T^{(m)}$ найдется набор управлений $u^{(k)}$, $k = \overline{1,m}$, такой, что решение системы, начиная из состояния $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$ и удовлетворяя промежуточным условиям связи (2), в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x^{(m)}(T) = x_T^{(m)}$.

Для исходной составной каузальной системы построено решение и на основе его доказан критерий её условной управляемости

Литература

1.Yamada T., Luenberger D. G. *Generic Controllability Theorems for Descriptor Systems.* // IEEE Trans. Autom. Control. 1985. Vol. AC-30. № 2. P. 144–152.

2. Размыслович Г. П. *Управляемость каузальных линейных дискретных систем с запаздыванием* // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 1996. № 3. С. 72–74.

3. Размыслович Г. П, Крахотко В. В. *Н-управляемость каузальных дифференциально-алгебраических динамических систем.* // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 2006. № 1. С. 123–125.

4. Барсегян В. Р. *Управление составных динамических систем.* М.: Наука, 2016.

К МНОГОТОЧЕЧНЫМ ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ

В. Н. Лаптинский

Изучается задача типа [1] построения возможных управлений класса $\mathbb{C}$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u, \tag{1}$$

$$x(t_s) = x_s, \tag{2}$$

$$\int_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{3}$$

где $A \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $Q \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{n\times r})$, $\Psi_i \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0,\omega]$, $i = \overline{1,k}$, $s = \overline{0,m}$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m \le \omega$, $\omega > 0$.

Задача (1), (2) рассматривалась в [1 и др.], (3) представляет собой обобщение интегральных условий [2 и др.], а при $k = \infty$ – задач [3, с. 264], [4, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [5, гл. 4] и структурные функции управления $P_s \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{r\times n})$, в частности $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Поскольку

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{4}$$

то, согласно (2),

$$\int\limits_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0, \tag{5}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрицы однородной (свободной) системы.

Соотношения (5) представляют собой интегральную задачу типа (3). С помощью методики [6, 7], используемой в [2], при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получим выражение

$$u(t) = G_t(z) + \varphi(t), \tag{6}$$

где $z = z(t)$ – вспомогательная вектор-функция, аналогичная [2], последовательно доопределяемая с сохранением произвола, $G_t(z)$, $\varphi(t)$ – соответственно линейный однородный оператор и функция, конструируемые по алгоритму

$$G_{j+1}(z_{j+1}) = G_j(z_{j+1}) - G_j(P_{j+1})\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big)^{-1}\int\limits_{t_0}^{t_{j+1}} P_{j+1}G_j(z_{j+1})d\tau, \tag{7}$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + G_j(P_{j+1})\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big)^{-1}\left[X^{-1}(t_{j+1})x_{j+1} - x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_{j+1}} P_{j+1}\varphi_j d\tau\right], \tag{8}$$

$j = \overline{0, m-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[t_0,\ t_j]$, при этом $G_0(z_1) = z_1$, $G_0(P_1) = P_1$, $\varphi_0 = 0$, $G_m(z_m) = G_t(z)$, $\varphi_m = \varphi(t)$, $z_m = z$,

$$\det\Big(X^{-1}\widetilde{QG_j(P_{j+1})}\Big) \neq 0, \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{9}$$

Выполнение условия (9) обеспечивает реализуемость процесса построения $G_t(z)$, $\varphi(t)$ начиная с $G_1(z_1) = z_1 - P_1\Big(\widetilde{X^{-1}QP_1}\Big)^{-1}\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}Qz_1 d\tau$, $\varphi_1 = P_1\Big(\widetilde{X^{-1}QP_1}\Big)^{-1} \times$ $\times\,[X^{-1}(t_1)x_1 - x_0]$.

Соотношение (6) принимаем за основу при рассмотрении системы (3). На основании (4), (6) имеем

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\left[G_\tau(z) + \varphi(\tau)\right]d\tau. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (3), получим

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} X(\tau)d\tau\int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)G_s(z)ds = \mu_i - \int\limits_{a_i}^{b_i} X(\tau)\left[x_0 + \int\limits_{t_0}^{\tau} X^{-1}(s)Q(s)\varphi(s)ds\right]d\tau.$$

Отсюда, используя $\Phi_i(t)$ и произвол функции z, по методике [6, 7] получим

$$z = K_t(y) + g(t), \tag{11}$$

где y, $K_t(y)$, $g(t)$ – величины типа [2], аналогичные принятым в (6).

Подставляя (11) в (6), получаем

$$u(t) = G_t(K_\tau(y) + g(\tau)) + \varphi(t). \tag{12}$$

Используя (12), имеем на основе (4)

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)Q(\tau)\left[G_\tau(K_s(y) + g(s)) + \varphi(\tau)\right]d\tau. \tag{13}$$

Замечание. Произвол функции $y(t)$ может быть использован при решении задач оптимизации. Описанный подход эффективен для решения других многоточечных задач управления [1, 8, 9 и др.].

Для иллюстрации применения алгоритма рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(2) = 4, \quad \int\limits_0^2 x(\tau)d\tau = 0.$$

На основе приведенных соотношений имеем последовательно

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)d\tau + z, \quad z = y + \frac{3}{2}t\int\limits_0^2 (1-\tau)y(\tau)d\tau + \frac{21}{2}t,$$

$$x = 3 - 10t + \frac{21}{4}t^2 + \int\limits_0^t y d\tau + \left(\frac{3}{4}t^2 - 2t\right)\int\limits_0^2 y d\tau + \frac{3}{4}t\,(2-t)\int\limits_0^2 \tau y d\tau.$$

Далее рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = 2, \quad x(2) = 4.$$

Аналогично получим

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 z(\tau)d\tau + z, \quad z = y + \left(3 + 2\int\limits_0^1 y d\tau - \int\limits_0^2 y d\tau\right)t,$$

$$x(t) = \widetilde{x}(t) + \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^2 y d\tau - 2\int\limits_0^1 y d\tau\right)t + \left(\int\limits_0^1 y d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 y d\tau\right)t^2 + \int\limits_0^t y d\tau,$$

$$\widetilde{x}(t) = 3 - \frac{5}{2}t + \frac{3}{2}t^2.$$

Выводы. Разработан алгоритм построения $u(t)$ и соответствующей функции состояний $x(t)$ – формулы (12), (13). Дана необходимая иллюстрация.

Литература

1. Лаптинский В. Н. *Об одной многоточечной задаче управления* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 103.

2. Лаптинский В.Н. *Об одной дифференциальной задаче с условиями интегрального типа* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2022). Материалы Междунар. науч. конф. В 2-х частях. Новополоцк, 2022. С. 61-63.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М. : Наука, 1977.

4. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

5. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

6. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. конф. Ч. 1. Гродно: ГрГУ, 2004. С. 81-82.

7. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Ч. 3. Мн.: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. С. 65.

8. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче управления* // Еругинские чтения XI. Тез. докл. междунар. мат. конф. Гомель, 2006. Мн.: Ин-т матем. НАН Бела-руси, 2006. С. 83.

9. Лаптинский В. Н. *Методика решения одной задачи управления для векторной системы второго порядка* // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докл. Междунар. матем. конф., Минск, 7 - 10 декабря 2010 г. – Минск : Ин-т матем. НАН Беларуси, 2010. С. 131.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

В.В. Малыгина

Рассмотрим систему линейных автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int\limits_0^r dR(s)\, x(t-s) = \int\limits_0^p dP(s)\, x(t-s) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $r, p > 0$, A — постоянная $n \times n$-матрица, R, P — $n \times n$-матрицы-функции ограниченной вариации, f — локально-суммируемая вектор-функция. Интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса, что позволяет учитывать как сосредоточенное, так и распределенное запаздывание. Начальную функцию, не нарушая общности, можно считать частью внешнего возмущения f. В указанных предположениях система (1) с заданными начальными условиями $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима в классе локально абсолютно непрерывных функций и ее решение представимо в виде [1]

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Матрица-функция X называется *фундаментальной матрицей* системы (1). Из (2) следует, что поведение любого решения системы (1) полностью определяется свойствами фундаментальной матрицы.

Систему (1) назовем *экспоненциально устойчивой*, если при некоторых положительных $N, \alpha > 0$ для всех $t \geq 0$ справедлива оценка $|X(t)| \leq N \exp(-\alpha t)$.

Левая часть (1) определяет специально выделенную «систему сравнения»

$$\dot{x}(t) + Ax(t) + \int_0^r dR(s)x(t-s) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

которую стремятся выбрать так, чтобы она имела более простую структуру, чем исходная система, но при этом ее решения обладали сходными с (1) асимптотическими свойствами. Эта схема («метод сравнения») успешно использовалась многими исследователями [2, 3, 4], но в большей части работ в качестве системы сравнения выбиралась система обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей A. Очевидно, что в этом случае фундаментальная матрица также является диагональной и имеет вид e^{-At}, что существенно упрощает исследование.

Отметим, однако, что дифференциальные уравнения с «малым» запаздыванием по свойствам близки к обыкновенным: если их решения стремятся к нулю, то только по экспоненциальному закону; они не выражаются явно через элементарные функции, но допускают точные двусторонние оценки [5, 6]. Это делает возможным выбор в качестве систем сравнения системы вида (3) с ненулевой матрицей R, что существенно расширяет возможности метода.

Пусть $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, где $a_k \in \mathbb{R}$, $R(s) = \operatorname{diag}\{r_1(s), r_2(s), \ldots, r_n(s)\}$, где каждая из функций r_k — неубывающая функция, $k = \overline{1, n}$; P — неубывающая матрица-функция.

Теорема 1. *Пусть система* (3) *экспоненциально устойчива, а ее фундаментальная матрица положительна. Тогда для фундаментальной матрицы системы* (1) *справедлива двусторонняя оценка*

$$0 \leq X(t) \leq N \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0, \tag{4}$$

если и только если матрица $A + \int_0^r dR(s) - \int_0^p dP(s)$ *обратима и*

$$\left(A + \int_0^r dR(s) - \int_0^p dP(s) \right)^{-1} \geq 0.$$

Теорема 1 дает эффективный критерий экспоненциальной устойчивости системы (1), если располагать соответствующей информацией о системе сравнения. В силу сказанного выше матрицы A и R предполагаются диагональными, следовательно, систему (3) можно рассматривать как совокупность независимых скалярных уравнений, для которых вопрос о положительности фундаментального решения и экспоненциальной устойчивости достаточно хорошо изучен. Приведем здесь эффективно проверяемый критерий, который обеспечивает точную двустороннюю оценку фундаментального решения.

Рассмотрим скалярное уравнение вида (3)

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^r x(t-s)dr(s) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

обозначим $F(\lambda) = \lambda + a + \int\limits_0^r e^{-\lambda s}\,dr(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, характеристическую функцию уравнения (5), через x_0 — его фундаментальное решение.

Теорема 2 [5]. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$, r_k *— неубывающая функция. Фундаментальное решение уравнения* (5) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\omega t} \le x_0(t) \le \frac{1}{F'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t \ge 0,$$

тогда и только тогда, когда $F(-\omega) = 0$, $F'(-\omega) > 0$ *при* $\omega > 0$.

Заметим, что теорема 2 дает точный показатель экспоненты и неулучшаемое значение коэффициента, на основе которых удается оценить N, α в оценке (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2023-0005).

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1991.

2. Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю. *Об устойчивости решений автономных систем Важевского* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1392–1407.

3. Перцев Н. В. *Применение M -матриц для построения экспоненциальных оценокрешений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифферен-циальных уравнений* // Мат. тр. 2013. Т. 16. № 2. С. 111–141.

4. Györi I. *Interaction between oscillations and global asymptotic stability in delay differential equations* // Differential Integral Equations. 1990. V. 3. № 1. P. 1811–200.

5. Малыгина В. В. *Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений* // Изв. вузов. Матем. 2021. № 12. С. 67–79.

6. Малыгина В. В., Чудинов К. М. *О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономных функционально-дифференциальных уравнений* // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63. № 2. С. 360–378.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.И. Матвеева

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. Исследованы асимптотические свойства решений на полупрямой и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования свойств решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–3]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Матвеева И. И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием* // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 3. С. 583–598.

2. Matveeva I. I. *Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays* // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18. № 2. P. 1689–1697.

3. Matveeva I. I. *Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 14. P. 3497–3504.

К МЕТОДАМ КОРРЕКТИРОВКИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Л.А Пилипчук

Обратная задача оптимизации с нормой l_p состоит в том, чтобы определить вектор стоимости $\widetilde{c}$ такой, что выбранный вектор x_0 является оптимальным решением $P(\widetilde{c}) = min\{\widetilde{c}x : x \in Z\}$. Другими словами,необходимо заменить вектор стоимости c на вектор $\widetilde{c}$ так, чтобы x_0 являлся оптимальным решением относительно возмущенного вектора стоимости $\widetilde{c}$, а стоимость возмущения при этом была бы минимальна.

Рассмотрим линейную задачу сетевой оптимизации однородного потока в обобщенной сети с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I^*} c_i x_i \longrightarrow \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = x_i, i \in I^*, \sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = a_i, i \in I \setminus I^*, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i\in I^*} \lambda_i^p x_i = \alpha_p, \; p = \overline{1,l}, \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \; (i,j) \in U, \; b_{*i} \le x_i \le b_i^*, \; i \in I^*, \tag{4}$$

где $G = (I, U)$ – связный конечный ориентированный граф, I^* – множество узлов с неизвестным внешним потоком $x_i, i \in I^*$, $x = (x_{ij}, (i,j) \in U; x_i, i \in I^*)$ – вектор дуговых и внешних потоков графа G, c_{ij}, c_i, μ_{ij}, a_i, λ_{ij}^p, λ_i^p, α_p, d_{ij}, b_{*i}, b_i^* – известные параметры задачи (1) – (4), $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$. Параметры линейной целевой функции (1) являются неточными данными.

Вектор $x = (x_{ij}, (i,j) \in U; x_i, i \in I^*)$ – допустимое решение экстремальной задачи (1) – (4) (выполняются ограничения (2) – (4)), $x \in Z$.

Математическая модель двойственной задачи к (1) – (4) имеет вид:

$$\sum_{i\in I\setminus I^*} a_i y_i + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{i\in I^*} b_{*i} w_i - \sum_{i\in I^*} b_i^* t_i - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} v_{ij} \longrightarrow \max, \tag{5}$$

$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} \le c_{ij}, \; v_{ij} \ge 0, \; (i,j) \in U, \tag{6}$$

$$-y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_i^p r_p + w_i - t_i = c_i, \; w_i \ge 0, \; t_i \ge 0, \; I^*, \tag{7}$$

вектор $\lambda = (y, r, w, t, v)$ – допустимое решение двойственной задачи (выполняются ограничения (6) – (7)), $\lambda \in \Lambda$ состоит из векторов $y = (y_i, i \in I)$, $r = (r_p, \; p = \overline{1,l})$, $w = (w_i, i \in I^*)$, $t = (t_i, i \in I^*)$, $v = (v_{ij}, (i,j) \in U)$.

Теорема 1. *Пусть $x^0 = (x_{ij}^0, \; (i,j) \in U; \; x_i^0, \; i \in I^*)$ – некоторое известное допустимое решение задачи (1) – (4), $x^0 \in Z$ и $\lambda = (y, r, w, t, v)$ – допустимое решение* *двойственной задачи (5) – (7),* $\lambda \in \Lambda$ *. Если для некоторого допустимого решения* $\lambda = (y, r, w, t, v)$ *,* $\lambda \in \Lambda$ *двойственной задачи (5) – (7) выполняются условия:* $(y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} - c_{ij})x_{ij}^0 = 0, (i,j) \in U$; $(d_{ij} - x_{ij}^0)v_{ij} = 0, (i,j) \in U$; $(x_i^0 - b_{*i})w_i = 0, i \in I^*$; $(b_i^* - x_i^0)t_i = 0, i \in I^*$, *то известное допустимое решение* x^0 *является оптимальным решением задачи (1) – (4).*

Пусть известно одно из допустимых решений x^0 задачи (1) – (4), $x^0 \in Z$. Требуется минимально изменить коэффициенты целевой функции (1), чтобы выбранное допустимое решение x^0 стало оптимальным. Для корректировки параметров линейной целевой функции (1) применим принципы обратной оптимизации [1] – [2]. Обозначим через γ_{ij} , β_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра c_{ij}, $(i,j) \in U$ и γ_i , β_i соответственно увеличение и уменьшение параметра c_i, $i \in I^*$ целевой функции (1). При этом, γ_{ij} и β_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения: $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $\gamma_{ij}\beta_{ij} = 0$, $(i,j) \in U$. Кроме этого, положим $\widetilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, при этом, γ_i и β_i одновременно не могут принимать положительные значения: $\widetilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i, i \in I^*$, $\gamma_i \geq 0, \beta_i \geq 0$, $\gamma_i\beta_i = 0, i \in I^*$.

Найти такие коэффициенты $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_{ij}, (i,j) \in U; \widetilde{c}_i, i \in I^*)$ для которых известное допустимое решение $x^0 \in Z$ является оптимальным решением экстремальной задачи с целевой функцией: $f(x^0) = \sum_{(i,j)\in U} \tilde{c}_{ij}x_{ij}^0 + \sum_{i \in I^*} \tilde{c}_i x_i^0 \longrightarrow \min$, и ограничениями (2) – (4).

Построим математическую модель процесса корректировки параметров линейной целевой функции (1). Мера близости векторов c и $\widetilde{c}$ оценивается с помощью нормы $l_p, p = 1$, что позволяет оставаться в рамках линейного программирования. Общая корректировка параметров целевой функции является минимальной в соответствии с нормой l_1 :

$$l_1 = \sum_{(i,j)\in U} |\widetilde{c}_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i\in I^*} |\widetilde{c}_i - c_i| = \sum_{(i,j)\in U} |\gamma_{ij} - \beta_{ij}| + \sum_{i\in I^*} |\gamma_i - \beta_i| =$$

$$\sum_{(i,j)\in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i\in I^*} (\gamma_i + \beta_i).$$

В зависимости от численных значений допустимого решения x^0 задачи (1) – (4) на основании теоремы 1 сформируем множества: $B_1 = \{(i,j) \in U : x_{ij}^0 = 0\}$, $B_2 = \{(i,j) \in U : x_{ij}^0 = d_{ij}\}$, $B_3 = \{(i,j) \in U : 0 < x_{ij}^0 < d_{ij}\}$, $R_1 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_{*i}\}$, $R_2 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_i^*\}$, $R_3 = \{i \in I^* : b_{*i} < x_i^0 < b_i^*\}$.

Обратная задача для определения минимальных изменений $\gamma = (\gamma_{ij},\ (i,j) \in U; \gamma_i,\ i \in I^*)$, $\beta = (\beta_{ij},\ (i,j) \in U; \beta_i,\ i \in I^*)$ параметров стоимости c линейной целевой функции (1) и нахождения возмущенного вектора $\widetilde{c}$ такого, что x_0 является оптимальным решением и стоимость возмущения при этом минимальна, имеет вид:

$$q(\gamma, \beta) = l_1 = \sum_{(i,j)\in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i\in I^*} (\gamma_i + \beta_i) \longrightarrow \min,$$

$y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p \leq c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in B_1$; $y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $v_{ij} \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $(i,j) \in B_2$; $y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in B_3$; $y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p + w_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $w_i \geq 0, \gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_1$; $y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p - t_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $t_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_2$; $-y_i + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^p r_p = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_3$.

Выбранное допустимое решение $x^0 \in Z$ задачи (1) – (4) является оптимальным решением экстремальной задачи сетевой оптимизации с целевой функцией

$$\sum_{(i,j)\in U}(c_{ij}+\gamma_{ij}-\beta_{ij})x_{ij}+\sum_{i\in I^*}(c_i+\gamma_i-\beta_i)x_i\longrightarrow\min$$

и ограничениями (2) – (4).

Литература

1. Ahuja R. K., Orlin J. B. *Inverse Optimization* // Operations Research. 2001. Vol. 49. No. 5. P. 771 – 783.

2. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. *Modeling parameters of the lower and upper bounds and parameters of the objective function for generalized network flow programming problems* // American Institute of Physics, AIP Conf. Proc.. 2015. Vol. 1690. 060007. doi: 10.1063/1.4936745, – 10 p.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с последействием

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right)=\sum_{i=0}^{m}A_ix(t-ih),\quad t>0, \tag{1}$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m}C_ix(t-ih),\quad t>0, \tag{2}$$

где x — решение уравнения (1), y — наблюдаемый выход; $h=\mathrm{const}>0$, $D, A_i,\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i\in\mathbb{R}^{r\times n}$. Считаем, что в начальном условии $x(t)=\eta(t),\, t\in[-mh,0]$, начальная функция $\eta\in\mathbf{PC}_D$ неизвестна. Здесь для произвольной матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A=\mathbf{PC}_A([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta:[-mh,0]\to\mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank}D=n_1$, $n_2=n-n_1$. Систему (1) назовем вполне регулярной, если $\deg|pD-A_0|=n_1$. Далее будем изучать только вполне регулярные системы (1).

Один и тот же выход $y(t),\, t>0$, может порождаться различными начальными функциями $\eta\in\mathbf{PC}_D\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$. Поэтому одному и тому же выходу $y(t),\, t>t_0\,(t_0\geqslant 0)$, может соответствовать множество решений $x(t),\, t>t_0$, уравнения (1). Каждое такое решение $x(t),\, t>t_0$, будем называть *совместимым* с выходом $y(t),\, t>t_0$.

Определение 1. Систему (1), (2) будем называть асимптотически наблюдаемой, если для любых двух решений x^1 и x^2 уравнения (1), совместимых с выходами y^1 и y^2 соответственно, выполняется условие: если $y^1(t)\equiv y^2(t),\, t>t_1\,(\exists\, t_1>0)$, то $\|x^1(t)-x^2(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to 0$ при $t\to+\infty$.

Замечание 1. Легко видеть, что определение 1 равносильно тому, что $\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\to 0$ при $t\to+\infty$ для всех решений системы, совместимых с нулевым выходом $y(t)\equiv 0,\, t>t_1\,(\exists\, t_1>0)$.

Рассмотрим систему (1), (2). Обозначим $W(p,\lambda)=Dp-A(\lambda)$, $A(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda^iA_i$, $C(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda^iC_i$. Введем множество $P_C=\left\{p\in\mathbb{C}\,:\,\operatorname{rank}\begin{bmatrix}W(p,e^{-ph})\\ C(e^{-ph})\end{bmatrix}<n\right\}$.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2\times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n\times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных $\gamma_i,\ i = 1, 2$).

Теорема 1. *Пусть для системы (1), (2) выполняется условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда система (1), (2) является асимптотически наблюдаемой тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) *множество* P_C *состоит из конечного числа элементов*; 2) $\operatorname{Re} p < 0\, \forall p \in P_C$.

Далее в докладе обсуждается процедура формирования оценки асимптотически наблюдаемых систем вида (1), (2) посредством реализации конечной цепочки построенных специальным образом наблюдателей. Подобные задачи для систем нейтрального типа изучены в [1, 2].

Литература

1. Хартовский В. Е. *К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №12. С. 1701–1716.

2. Хартовский В. Е. *Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей.* Гродно: ГрГУ, 2022.

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Е. Хартовский

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\left(Dx(t)\right) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k\times m}[\lambda]$ — множество полиномиальных матриц); λ_h — оператор сдвига, определенный для заданного $h > 0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t-h)$; $y(t),\ t > 0,$ — наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием $x(t) = \eta(t),\ t \in [-mh, 0]$, где η — неизвестная кусочно-непрерывная функция. Считаем, что уравнение (1) удовлетворяет условию полной регулярности $\deg|pD - A(0)| = \operatorname{rank} D$.

Для систем нейтрального типа различные задачи получения оценки решения при помощи асимптотических наблюдателей исследованы в [1–3] (см. также библиографию в этих работах), а в работах [4-5] построены финитные наблюдатели, ошибка которых есть финитная функция. В настоящем докладе подход, предложенный в работах [1; 2, с. 375], обобщается на случай системы (1), (2).

Обозначим $\deg C(\lambda) = m$, $B_k = \left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}C(\lambda)\big|_{\lambda=0}\right)^T$, $k = \overline{0,m}$, и составим дескрипторное уравнение $B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^m B_i g(k+1-i) = 0$, $k = m, m+1, \ldots,$ $g(i) = \widetilde{g}_i$,

$i=\overline{1,m}$, $\widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$. Решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда [6] $\widetilde{g}_{m-i} = T_i c$, $i=\overline{1,m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$ $(r_0 \in \mathbb{N})$ — матрицы, построенные специальным образом, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор. Пусть $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ — любое фиксированное решение системы $B_0T_1S + \sum_{i=1}^{m} B_iT_i = 0$, $T_kS = T_{k-1}$, $k=\overline{2,m}$. Положим $T = T_m$, $G_0 = B_0T$, $G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i=\overline{1,m-1}$, $G(\lambda) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i\right)^T$. Способ выбора всех возможных матриц S описан в работе [7].

Определим наблюдатель

$$\frac{d}{dt}(Dz(t)) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}\left[\mathfrak{C}(\lambda_{\mathfrak{h}})\mathfrak{z}_{\mathfrak{t}}\right] + \mathfrak{M}_{01}[\mathfrak{z}_{1\mathfrak{t}}] + \mathfrak{M}_{02}[\mathfrak{z}_{2\mathfrak{t}}] - \mathfrak{M}_{00}[\mathfrak{y}_{\mathfrak{t}}],$$

$$\dot{z}_1(t) = \mathfrak{M}_{10}\left[\mathfrak{C}(\lambda_{\mathfrak{h}})\mathfrak{z}_{\mathfrak{t}}\right] + \mathfrak{M}_{11}[\mathfrak{z}_{1\mathfrak{t}}] + \mathfrak{M}_{12}[\mathfrak{z}_{2\mathfrak{t}}] - \mathfrak{M}_{10}[\mathfrak{y}_{\mathfrak{t}}], \tag{3}$$

$$z_2(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + M_{21}(\lambda)z_1(t) + M_{22}(\lambda_h)z_2(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0.$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1,2$; запись $\mathfrak{M}_{\mathfrak{ij}}[\mathfrak{f}_{\mathfrak{t}}]$ для кусочно-непрерывной функции $f(t)$ означает функцию вида $\mathfrak{M}_{\mathfrak{ij}}[\mathfrak{f}_{\mathfrak{t}}] = \mathfrak{J}_{\mathfrak{ij}}(\lambda_{\mathfrak{h}})\mathfrak{f}(\mathfrak{t}) + \sum_{\mathfrak{k}=0}^{\mathfrak{m}_{\mathfrak{ij}}} \int_0^{\mathfrak{h}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{ij}}^{(\mathfrak{k})}(\mathfrak{s})\mathfrak{f}(\mathfrak{t}-\mathfrak{k}\mathfrak{h}-\mathfrak{s})\mathfrak{d}\mathfrak{s}$, где $J_{ij}(\lambda)$ — полиномиальная матрица, $J_{ij}^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde{m}_k} e^{\alpha_{ijk\rho}s}\left(J_{ij1}^{(k\rho)}(s)\cos\beta_{ijk\rho}s + J_{ij2}^{(k\rho)}(s)\sin\beta_{ijk\rho}s\right)$, ($\alpha_{ijk\rho}$, $\beta_{ijk\rho}, \in \mathbb{R}$, $J_{ij1}^{(k\rho)}(s), J_{ij2}^{(k\rho)}(s)$ — полиномиальные матрицы подходящих размеров); $M_{20}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n}[\lambda]$, $M_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_j}[\lambda]$, $j = 1,2$, $M_{22}(0) = 0$; t_0 — некоторый момент времени.

Зададим для системы (3) начальные условия

$$z(t) = \tilde{z}(t),\ z_i(t) = \tilde{z}_i(t),\ t \in [t_0 - h_1, t_0],\ i = 3,4. \tag{4}$$

Здесь h_1 — длина отрезка последействия системы (3), $\tilde{z}$, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ — кусочно-непрерывные функции. Компонента z вектора решения $\mathrm{col}[z, z_1, z_2]$ системы (3) есть оценка решения x системы (1), $\varepsilon = z - x$ — ошибка оценивания. Обозначим $W(p,\lambda) = pD - A(\lambda)$, Γ_1, Γ_2 — фундаментальные матрицы решений алгебраических уравнений $\gamma D = 0_{1\times n}$, $D\gamma = 0_{n\times 1}$, $\Delta(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (3).

Теорема 1. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (3) такой, что* $\varepsilon(t)$ *является векторной компонентой решения однородной* $(y \equiv 0)$ *системы (3), для которой* $\left|\Delta(p, e^{-ph})\right| = \nu d(p, e^{-ph})$, *где* $d(p, e^{-ph})$ *— любой наперед заданный характеристический квазиполином (с достаточно большой величиной* $\deg_p d(p,\lambda)$ *),* $\nu \in \mathbb{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $\mu_i(S)$ — собственные значения матрицы S, $\rho_S = \max\left\{|\mu_i(S)|\right\}$.

Теорема 2. *Для того, чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (3) такой, что* $\|\varepsilon(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0$, *каково бы ни было начальное условие (4), достаточно, чтобы существовала матрица* S, *для которой* $\rho_S < 1$, *и выполнялись условия*

$$1)\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p,e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad p \in \mathbb{C}; \quad 2)\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \\ G(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть для системы (1), (2) выполняются условия (5) и существует матрица* S, *для которой* $\rho_S \leqslant 1$ *и размеры всех жордановых клеток матрицы* S, *отвечающих собственным $\mu_i(S)$ таким, что $|\mu_i(S)| = 1$, равны единице. Тогда существует наблюдатель (3) такой, что для любого начального условия (4) найдутся $\beta \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, обеспечивающие неравенство $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \beta + \omega(t),\ t > t_2 + k_0 h$.*

Литература

1. Хартовский В.Е. *Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №3. С. 409–422.

2. Хартовский В.Е. *Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей.* Гродно: ГрГУ, 2022.

3. Хартовский В.Е. *К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. №12. С. 1701–1716.

4. Метельский А.В., Хартовский В.Е. *Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102.

5. Метельский А.В., Хартовский В.Е. *О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. №2. С. 265–285.

6. Хартовский В.Е. *Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I Приложение к задаче 0-управляемости* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Вып. 2. С. 290–311.

7. Хартовский В.Е. *Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства* // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 102–121.

О РАСЩЕПЛЯЮЩЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О.Б. Цехан

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления с выходом и с запаздыванием по состоянию в уравнении медленной переменной и в выходе:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_1\left(t, e^{-ph}\right)x(t) + \mathbf{A}_2\left(t, e^{-ph}\right)y(t) + B_1(t)\,u(t),\ x \in \mathbb{R}^{n_1},\ y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu\dot{y}(t) = A_3(t)\,x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t),\ u \in \mathbb{R}^r,\ t \in T = [t_0, t_1], \\ v(t) = \mathbf{C}_1\left(t, e^{-ph}\right)x(t) + \mathbf{C}_2\left(t, e^{-ph}\right)y(t),\ v \in \mathbb{R}^m,\ t \in T. \end{array} \qquad (1)$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$, x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $p \triangleq \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, $h = const > 0$ — запаздывание, e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $u(t)$ — кусочно-непрерывная на T вектор-функция управления, $v(t)$ – выход системы, $\mathbf{A}_i\left(t, e^{-ph}\right) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $\mathbf{C}_i\left(t, e^{-ph}\right) = C_{i0}(t) + C_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, – ограниченные на T нестационарные операторы $\mathbf{A}_i\left(t, e^{-ph}\right) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{C}_i\left(t, e^{-ph}\right) : (PC[t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \to \mathbb{R}^m$, где $A_{ij}(t), i = 1, 2, j = 0, 1$, $A_k(t), k = 3, 4$, – функциональные матрицы подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими, $B_j(t), j = 1, 2$, $C_{ij}(t), i = 1, 2, j = 0, 1$, – непрерывные на T функциональные матрицы подходящих размеров.

В теории управления для многотемповых систем, к которым относится (1), для решения проблем большой размерности, жесткости, сингулярной зависимости моделей от параметров актуально разделение переменных по темпам их изменения. Один из подходов к разделению движений основан на применении невырожденных преобразований типа [1]. Для систем с запаздыванием проблема разделения движений осложняется тем, что пространство состояний таких систем бесконечномерно. Например, локальная замена переменных, эквивалентная преобразованию [1,2], при применении ее к системе с немалым запаздыванием приводит лишь к частичной декомпозиции системы [3], функциональные преобразования систем с запаздыванием могут привести к изменению пространства решений [4].

В настоящей работе, развивающей [5,6], разрабатывается расщепляющее преобразование для системы (1). Используется представление оператора системы в кольце формальных степенных рядов, что позволяет применять алгебраические свойства оператора запаздывания.

Оператор системы (1) $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right) & \mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\\ \mu^{-1}A_3\left(t\right) & \mu^{-1}A_4\left(t\right)\end{pmatrix}$ можно рассматривать как зависящий от параметра μ нестационарный оператор с непрерывными на T коэффициентами из кольца матричных полиномов от символа оператора запаздывания над полем $\mathbb{R}$. Класс таких операторов обозначим $\mathcal{M}_T\left(t,\mu,e^{-ph}\right):(PC[t_0,t_1];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$.

Продолжим непрерывно с T на $(-\infty,t_1]$ матричные функции $A_{ij}\left(t\right),\ C_{ij}\left(t\right),i=1,2,\ j=0,1,\ A_k\left(t\right),k=3,4,\ B_j\left(t\right),j=1,2,$ и сохраним для них прежние обозначения.

Через $\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ обозначим класс нестационарных матричных операторов $\mathbf{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right):\left(PC\left(-\infty,t\right];\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}^n$ с зависящими от малого параметра μ ограниченными непрерывными на $(-\infty,t_1]$ элементами в кольце формальных степенных рядов от символа оператора запаздывания e^{-ph} над полем $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\in\in\mathcal{M}_T\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\subset\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$.

С целью сокращения записей аргументы $\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ у матричных операторов иногда будем опускать, когда это не приводит к неоднозначному пониманию.

При фиксированном $\mu\in(0,\mu^0]$ на множестве $\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ определим оператор преобразования $\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\colon\ \mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\to\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ вида

$$\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)=\begin{pmatrix}E_{n_1} & \mu\,\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\\ -\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right) & E_{n_2}-\mu\,\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\end{pmatrix},\tag{2}$$

действующий на $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\in\mathcal{M}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ по правилу:

$$\mathbf{K}*\mathbf{A}=\mathbf{KAK}^{-1}-\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{K}}.\tag{3}$$

Здесь $\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$, $\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ – нестационарные зависящие от малого параметра μ и оператора запаздывания e^{-ph} операторные матрицы, которые удовлетворяют для $t\in(-\infty,t_1]$ следующим матричным дифференциальным операторными уравнениям Риккати:

$$\begin{aligned}&\mu\,\dot{\mathbf{L}}=A_4\left(t\right)\mathbf{L}-A_3\left(t\right)-\mu\,\mathbf{L}\,\left(\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right)-\ \mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}\right),\\&-\mu\,\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{H}A_4\left(t\right)-\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)+\mu\mathbf{HLA}_2\left(t,e^{-ph}\right)-\\&\mu\left(\mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right)-\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}\right)\mathbf{H}.\end{aligned}\tag{4}$$

Используя (2), введем нелокальную по времени замену переменных:

$$\begin{pmatrix}x\left(t\right)\\ y\left(t\right)\end{pmatrix}=\mathbf{K}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\begin{pmatrix}\xi\left(t\right)\\ \eta\left(t\right)\end{pmatrix},\ \xi\left(t\right)\in\mathbb{R}^{n_1},\ \eta\left(t\right)\in\mathbb{R}^{n_2},\ t\in(-\infty,t_1],\tag{5}$$

которая порождает преобразование (3) оператора $\mathbf{A}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ системы (1).

Теорема. *Пусть 1) элементы матриц* $A_{ij}(t), i = 1,2, j = 0,1,$ $A_i(t), i = 3,4,$ *определены и являются ограниченными аналитическими функциями на* $(-\infty, t_1]$ *; для матрицы* $A_4(t)$ $\forall t \in (-\infty, t_1]$ *выполнены предположения:* $Re\,\lambda(A_4(t)) \le -c < 0$, $\|A_4(t)\| \le \beta$, $\left\|\dot{A}_4(t)\right\| \le \beta$ *; 3) существуют удовлетворяющие на* $(-\infty, t_1]$ *системе (4) матричные функции* $\mathbf{L}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$, $\mathbf{H}\left(t,\mu,e^{-ph}\right)$ *такие, что соответствующая матрица (2) является матрицей Ляпунова. Тогда существует* $\mu^* > 0$ *такое, что в результате замены переменных (5), (2), (4)* $\forall \mu \in (0,\mu^*]$ *система (1) преобразуется в алгебраически и асимптотически эквивалентную систему с разделенными движениями*

$$\begin{array}{l} \dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\xi(t) + \mathbf{B}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right)u(t), \\ \mu\dot{\eta}(t) = \mathbf{A}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\eta(t) + \mathbf{B}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right)u(t),\ t \in T, \\ v(t) = \mathbf{C}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\xi(t) + \mathbf{C}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right)\eta(t),\ t \in T, \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq \mathbf{A}_1\left(t,e^{-ph}\right) - \mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}, \mathbf{B}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq \\ = B_1(t) - \mathbf{H}B_2(t) - \mu\mathbf{HL}B_1(t), \\ \mathbf{C}_\xi\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq (\mathbf{C}_1\left(t,e^{-ph}\right) - \mathbf{C}_2\left(t,e^{-ph}\right)\mathbf{L}), \\ \mathbf{A}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq A_4(t) + \mu\,\mathbf{L}\mathbf{A}_2\left(t,e^{-ph}\right), \mathbf{B}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq B_2(t) + \mu\mathbf{L}B_1(t), \\ \mathbf{C}_\eta\left(t,\mu,e^{-ph}\right) \triangleq \mathbf{C}_2\left(t,e^{-ph}\right) + \mu\left(\mathbf{C}_1\left(t,e^{-ph}\right) - \mathbf{C}_2\left(t,e^{-ph}\right)\right)\mathbf{H}, \end{array}$$

и операторы системы (6) могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами из кольца матричных полиномов от оператора запаздывания, которые вычисляются итеративно по функциональным матрицам системы (1).

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ № Ф22-050.

Литература

1. Chang K. *Singular perturbations of a general boundary value problem* // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. № 3. P. 520–526. doi:10.1137/0503050

2. Kokotovic P.V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design.* NY. Academic Press, 1999.

3. Magalhaes L.T. *Invariant manifolds for singularly perturbed linear functional differential equations* // Journal of Diff. Equat. 1984. Vol. 54. № 3. P. 310-345.

4. Марченко В.М., Луазо Ж.-Ж. *Реализация динамических систем в шкалах систем с последействием: I. Реализуемость* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1515–1523.

5. Цехан О. Б. *Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7. № 1. С. 50–61.

6. Tsekhan O. *Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay* // Tchemisova, T.V., Torres, D.F.M., Plakhov, A.Y. (eds) Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer, Cham. 2023. Vol. 407. P. 77–97 doi: 10.1007/978-3-031-17558-9-4

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими элементами, $B(t, s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными, T-периодическими по первой переменной элементами, т.е.

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t, s) \equiv B(t+T, s).$$

Цель работы состоит в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получении оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi \in C(-\infty, 0]$ ограниченная заданная функция. При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [2]:

$$v(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s, \eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского из [1]. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть*

1. Существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$, и дифференцируемая по первой переменной матрица $K(t, \eta) = K(t, \eta)$, такие, что

$$H(t) > 0, \quad K(t, \eta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t, \eta) < 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0.$$

2. Существует такое число $k > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t, \eta) + kK(t, \eta) \le 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0.$$

3. Определена матрица

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \int\limits_0^\infty K(0,s)ds -$$

$$-\int\limits_0^\infty H(t)B(t,s)K^{-1}(s,s)B^*(t,s)H(t)ds,$$

при этом $\int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0$, *где* $\gamma(t) = \min\{p_H(t), k\}$, $p_H(t)$ *— минимальное собственное значение матрицы* $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}P(t)H^{-\frac{1}{2}}$.

Тогда для решения начальной задачи (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\| e^{-\int\limits_0^t \gamma(s)ds} v(0,\varphi),$$

где

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\eta}^0 K(-s,\eta)\varphi(s), \varphi(s)ds.$$

Отметим, что из полученной оценки следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

2. Ыскак Т. *Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием* // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17, С. 416–427. Yskak T. K., Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay, Functional Differential Equations, 2018. v. 25. No. 1-2. 97-108.

CLOSING AND CONNECTING LEMMAS FOR CONSERVATIVE FLOWS

S.G. Kryzhevich

This is a joint work with Prof. E.O. Stepanov. We consider an autonomous system of ordinary differential equations:

$$\dot{x} = V(x), \qquad x \in R^d$$

where the vector field V is bounded, Lipschitz continuous, and satisfies the so-called zero-mean drift condition [1]:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L^d} \sup_{x\in R^d} \left| \int\limits_{[0,L]^d} V(x+y)\,dy \right| = 0.$$

Theorem 1 [2] *Let the vector field V satisfy the above conditions. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists a perturbation $W(x)$ such that $\|W\|_{C^1} < \varepsilon$ and every point of the system*

$$\dot{x} = V(x) + W(x) \tag{1}$$

is non-wandering.

This implies an analog of the classical Pugh's Closing Lemma.

Theorem 2. *In assumptions of Theorem 1, any countable set of points can be made periodic by a C^1 – small perturbation of the vector field V.*

And, finally, we proved a version of the Connecting Lemma [3].

Theorem 3. *On compact manifolds, in assumptions of Theorem 1, for any points p and q of the space R^d and any $\varepsilon > 0$ there exists an ε – small C^1 perturbation W such that $q \in O^+{}_{V+W}(p)$, the positive semi-orbit of the point p w.r.t system (1).*

Refrences

1. D. Burago, S. Ivanov, A. Novikov, *A survival guide for feeble fish* // Algebra i Analiz. 2017. 29:1. 49–59.

2. S. Kryzhevich, E. Stepanov, *The saga of a fish: from a survival guide to closing lemmas* // Journal of Differential Equations. 2019. 267:6. 3442-3474.

3. Ch. Bonatti, S. Crovisier, *Récurrence et généricité* // Invent. Math. 2004. 158. P. 33-104

АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

Александрович Т.А. tatyanka.aleksandrovich@mail.ru. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 120.

Альсевич В.В. alsevichvv@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 101.

Амелькин В.В. vamlkn@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 62.

Андреева Т.К. tatsyana.andreeva@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 3, 4.

Асташова И.В. ast.diffiety@gmail.com. Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова, Москва, Россия. С. 56.

Антоневич А.Б. antonevich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 5.

Баландин А.С. balandin-anton@yandex.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 103.

Барабанов Е.А. barabanove58@gmail.com. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 24, 26, 28.

Бекряева Е.Б. evgenia.bekriaeva@gmail.com. Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь. С. 24.

Белокурский М.С. drakonsm@ya.ru. Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь. С. 64.

Березкина Н.С. korotkaja3@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 24.

Бондарев А. А. albondarev1998@yandex.ru. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 29.

Бондарев А.Н. alex-bondarev@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь. С. 65.

Боревич Е.З. danitschi@gmail.com. Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 68.

Борухов В.Т. borukhov@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 69.

Булатов В.И. bulatov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 105.

Быков В.В. vvbykov@gmail.com. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 26.

Вабищевич М.М. fpm.vabischeMM@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 107.

Василевич М.Н. vasilevich.m@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 71.

Ветохин А.Н. anveto27@yandex.ru. МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. С. 31.

Войделевич А.С. aliaksei.vaidzelevich@gmail.com. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 33.

Гончарова М.Н. m.gonchar@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 106.

Горячкин В.В. gorvv@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 110.

Кузьмич А.В. kuzmich_av@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 73.

Кулеш Е.Е. kulesh@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11, 13.

Кумко А.А. sasha.kumko@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 15.

Кухарев А.Л. angrey.cuxarev@yandex.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 7.

Лавринович Л.И. lavrinovich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 116.

Лаптинский В.Н. lavani@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь. С. 78, 80, 122.

Леваков А.А. levakov123321@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 43.

Липницкий А.В. ya.andrei173@yandex.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 44.

Макаров Е.К. jcm@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 46.

Маковецкая О.А. olya.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 83.

Маковецкий И.И. imi.makzi@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 85.

Малыгина В.В. mavera@list.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 125.

Мартынов И.П. i.martynov@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 3, 4, 13, 15, 19.

Матвеева И.И. i.matveeva@g.nsu.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 127.

Мироненко В.В. vladimir.v.mironenko@gmail.com. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,. С. 87.

Мироненко В.И. vmironenko@tut.by. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,. С. 87.

Мисник М.В. misnikmv@mail.ru . Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 4.

Можджер Г.Т. Mog_Gra@tut.by. Гродненский Государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 17.

Мусафиров Э.В. musafirov@bk.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 88.

Мухин А.А. artikmushka@gmail.com. ГУО Средняя школа №23 г. Гродно , Гродно, Беларусь. С. 19.

Нипарко Н.С. nad-den@mail.ru. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 28.

Петрович П.А. . С. 101.. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Пецевич В.М. pecevich@mail.ru. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11.

Пилипчук Л.А. pilipchuk@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 127.

Попова С.Н. udsu.popova.sn@gmail.com. Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. С. 48.

Потапов Д.К. d.potapov@spbu.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 118.

Пронько В.А. v.a.pronko@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 3, 15, 19.

Размыслович Г.П. razmysl@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 121.

Роголев Д.В. d-rogolev@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилёв, Беларусь. С. 90.

Руденок А.Е. roudenok@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 92.

Сергеев И.Н. igniserg@gmail.com. Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия. С. 49.

Сидоренко И.Н. sidorenko_in@msu.by. Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь. С. 94.

Тыщенко В.Ю. valentinet@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 62.

Федорова М.В. fedoro.masha2013@yandex.ru. Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. С. 48.

Фоминых Е.И. fletl@list.ru. Гомельский торгово-экономический колледж, Гомель, Беларусь. С. 41.

Хартовский В.Е. hartovskij@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 130, 131.

Хвощинская Л.А. ludmila.ark@gmail.com. Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. С. 20.

Худякова П.А. khudziakova@tut.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 52.

Цегельник В.В. tsegvv@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 21.

Цехан О.Б. tsekhan@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 133.

Чергинец Д.Н. cherginetsdn@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 96.

Чудинов К.М. cyril@list.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 54.

Шагова Е.Г. tanya.shagova@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь . С. 5.

Ыскак Т. istima92@mail.ru. Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск, РоссияС. 135.

Czornik Adam adam.czornik@polsl.pl. Silesian University of Technology, Department of Automatic Control and Robotics, Gliwice, PolandP. 59.

Kryzhevich S. G. serkryzh@pg.edu.pl. Gdansk University of Technology, Gdansk, PolandP. 137.

Niezabitowski Michał michal.niezabitowski@polsl.pl. Silesian University of Technology, Department of Automatic Control and Robotics, Gliwice, PolandP. 59.

Zhalukevich D. S. den.zhal@yandex.by. Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Fizyki, Białystok, Poland,P. 98. ——————————————————-

СОДЕРЖАНИЕ

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Асимптотическая теория дифференциальных уравнений

Качественная теория дифференциальных уравнений

Теория устойчивости и управления движением

Научное издание

XXI Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(Еругинские чтения – 2023)

Материалы конференции
(Могилев, 23 – 27 мая 2023 года)

В двух частях

Часть 1

Авторы несут персональную ответственность
за содержание публикуемых материалов

Редакторы *В. В. Амелькин, А. Б. Антоневич,*
А. И. Астровский, М. М. Васьковский, А. Л. Гладков,
В. И. Громак, А. К. Деменчук, С. А. Мазаник, И. И. Маковецкий, Е. К. Макаров
Компьютерный дизайн *А. К. Деменчук, Е. К. Макаров, И. И. Маковецкий*

Подписано в печать 18.05.2023. Формат $60 \times 84\ ^1/_8$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 17,21. Уч.-изд. л. 9,13. Тираж 85 экз. Заказ № 585.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.