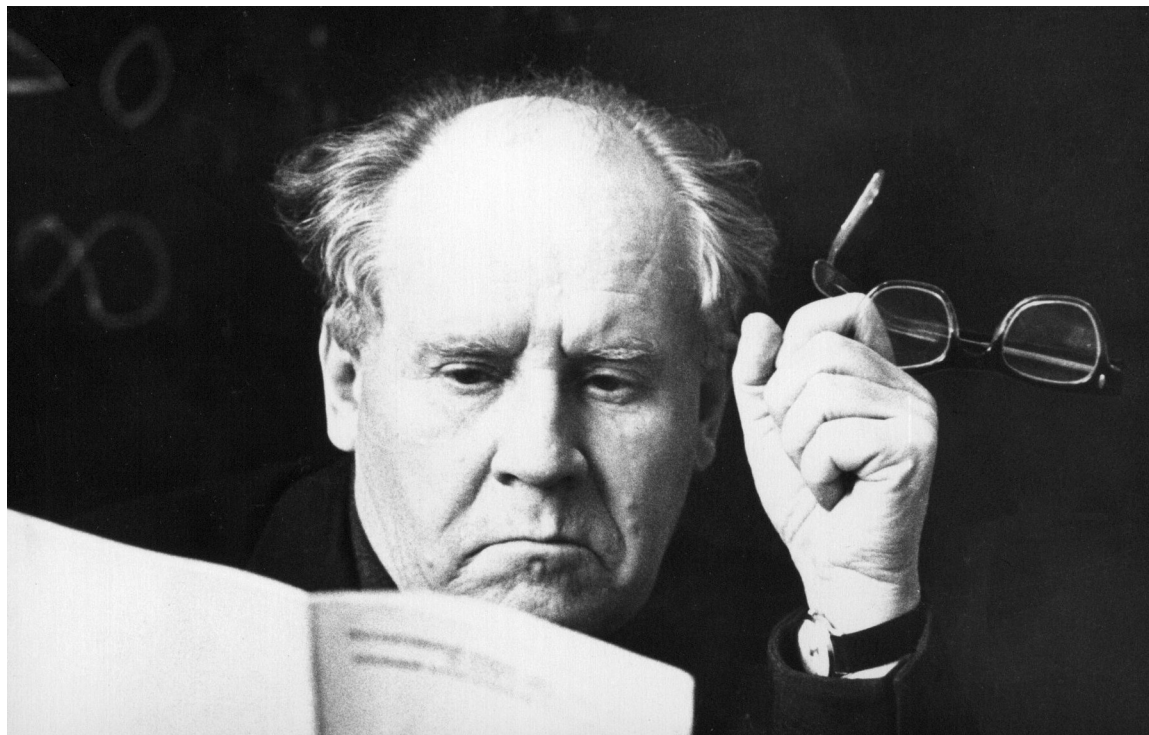


ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**XXI Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(Еругинские чтения - 2023)**

Материалы конференции
(Могилев, 23–27 мая 2023 года)

В двух частях

Часть 2

**Уравнения с частными производными
Интегро-дифференциальные и стохастические
дифференциальные уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания математических дисциплин
в высшей школе**

Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2023

УДК 517.9:001(045)

ББК 22.161.6:73

Д22

Редакционная коллегия: *В. В. Амелькин, А. Б. Антонец, А. И. Астровский, М. М. Васьюковский, А. Л. Гладков, В. И. Громак, А. К. Деменчук, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров, И. И. Маковецкий*

*Конференция проводится при финансовой поддержке
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований*

XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям Д22 (Еругинские чтения – 2023): материалы конф.: в 2 ч. / Ин-т мат. нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. — Ч. 2. – 169 с.

ISBN 978-985-492-296-6 (ч. 2).

Сборник содержит доклады, представленные на XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2023) по вопросам уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных и стохастических дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений и их приложений, методики преподавания математических дисциплин в высшей школе.

УДК 517.9:001(045)

ББК 22.161.6:73

ISBN 978-985-492-296-6 (ч. 2)

ISBN 978-985-492-294-2

© Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», 2023

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ОСОБЫЕ ВАРИАНТЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОНУСАХ

Н.Н. Агаркова, В.Б. Васильев, И.Н. Ибадуллаева, Н.В. Эберлейн

В работе [1] были рассмотрены эллиптические псевдодифференциальные уравнения в модельных областях с негладкой границей (конические точки, ребра различной размерности). Исследование было основано на специальной волновой факторизации эллиптического символа с индексом \varkappa , наличие которой позволяло описать картину разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения. Эти исследования были продолжены и развиты в многомерных ситуациях, и, в частности, рассмотрены случаи, когда параметры конуса стремятся к предельным значениям 0 и ∞ [2–5].

Модельный псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, определяется стандартно

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} A(\xi) u(y) dy d\xi.$$

На плоскости рассматривается уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \quad (1)$$

где

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a|x_1|, a > 0\},$$

решение ищется в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$. Предполагается, что такая факторизация для символа $A(\xi)$ существует относительно угла C_+^a и выполняется условие $1/2 < \varkappa - s < 3/2$.

Далее мы добавляем интегральное условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 \equiv g(x_1). \quad (2)$$

Показано, что задача (1),(2) однозначно разрешима при $a \rightarrow \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению.

В трехмерном случае рассмотрено уравнение

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^{ab}}, \quad (3)$$

в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^{ab}})$, где

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 < a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\},$$

с интегральным условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \quad (4)$$

в случае $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$. Показано, что задача (3), (4) однозначно разрешима при $a \rightarrow \infty$ или $b \rightarrow \infty$, только если функция g удовлетворяет определенному интегральному уравнению.

Мы опишем здесь несколько многомерных ситуаций, основываясь на этих примерах. Точнее, мы покажем, какие многомерные области с разрезами могут быть получены аналогичным предельным переходом и приведем формулировки соответствующих постановок краевых задач.

Основная идея заключается в следующем. Пусть C_1 и C_2 – конусы в \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n соответственно, не содержащие целой прямой. Очевидно, что $C_1 \times C_2$ – это конус в пространстве \mathbb{R}^{m+n} , не содержащий целой прямой в \mathbb{R}^{m+n} . Тогда мы можем поставить краевую задачу аналогичную (3),(4) в области $\mathbb{R}^{m+n} \setminus (C_1 \times C_2)$. Записывая формулу для решения этой задачи (при наличии волновой факторизации относительно "большого" конуса), мы можем рассматривать краевые задачи в областях с многомерными разрезами разной геометрии, устремляя к предельным значениям параметры конусов C_1 и C_2 .

Первый вариант такой краевой задачи

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^5 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^{bd})}, \\ \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) dx_2 dx_5 = g(x_1, x_3, x_4), \end{cases} \quad (5)$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^{bd} \subset \mathbb{R}^3$,

Второй вариант

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{(C_+^a \times C_+^b)}, \\ \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4 = g(x_1, x_3), \end{cases}$$

где $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^b \subset \mathbb{R}^2$.

Можно рассмотреть и такой вариант с двумя многогранными углами в \mathbb{R}^6 , точнее, следующую краевую задачу

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^6 \setminus \overline{(C_+^{ab} \times C_+^{dl})}, \\ \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) dx_3 dx_6 = g(x_1, x_2, x_4, x_5), \end{cases}$$

где $C_+^{ab} \subset \mathbb{R}^3$, $C_+^{dl} \subset \mathbb{R}^3$.

Наконец, можно вернуться к краевой задаче (5) и рассмотреть такую же краевую задачу. Разумеется, решение будет таким же, но предельный вариант возможен в виде: $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $d = const$, получая разрез другой геометрии.

Литература

1. Vasil'ev V.B. *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. Vasilyev V.B. *Pseudodifferential equations, wave factorization, and related problems* // Math.Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 18. P. 9252–9263.
3. Vasilyev V.B. *Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case* // Opusc. Math. 2019. V. 39. № 1. P. 109–124.
4. Vasilyev V.B. *On certain 3-dimensional limit boundary value problems* // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 5. P. 917–925.
5. Kutaiba Sh., Vasilyev V. *On limit behavior of a solution to boundary value problem in a plane sector* // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 15. P. 11904–11912.

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.А. Акимов

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), описывающих уравнение равновесия упругой изотропной среды [1]:

$$\nabla^2 u_i + k u_{j,ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

на которые дополнительно накладываются условия в частных производных [2]:

$$\partial_3 u + \partial_1 w = 0; \partial_3 \nu + \partial_2 w = 0; (k-1)\theta + 2\partial_3 w = 0; \theta = \partial_1 u + \partial_2 \nu + \partial_3 w \quad (2)$$

Здесь обозначено

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \partial_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \partial_3; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 \text{ — оператор Лапласа;}$$

$k = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}$; λ, μ — коэффициенты Ламе; ν — коэффициент Пуассона; $u_1 = u$, $u_2 = \nu$, $u_3 = w$ — проекции перемещений упругой среды на координатные оси декартовой системы координат. Напомним, что индексы, отделенные запятой, означают взятие производных, а если индексы повторяются, то по ним производится суммирование. Решение исходной системы запишем в виде [1]:

$$\begin{aligned} u &= (k+1)\nabla^2 \varphi_1 - k\partial_1(\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ v &= (k+1)\nabla^2 \varphi_2 - k\partial_2(\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \\ w &= (k+1)\nabla^2 \varphi_3 - k\partial_3(\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ должны удовлетворять трехмерному бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \nabla^2 \nabla^2 = \Delta^4 + 2\Delta^2 \partial_3^2 + \partial_3^4; \quad \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2. \quad (4)$$

Разделим задачу на две.

Задача А. В этом случае перемещения u и ν описываются четными функциями относительно переменной z , а w — нечетной.

Задача Б. Здесь перемещения u и ν являются нечетными функциями относительно переменной z , а w — четной.

Разделим переменные:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [C_{A1} \cos(z\Delta) + D_{A1} z \sin(z\Delta) + C_{B1} \sin(z\Delta) + D_{B1} z \cos(z\Delta)] * f(x, y), \\ \varphi_2 &= [C_{A2} \cos(z\Delta) + D_{A2} z \sin(z\Delta) + C_{B2} \sin(z\Delta) + D_{B2} z \cos(z\Delta)] * f(x, y), \\ \varphi_3 &= [A_{A3} \sin(z\Delta) + B_{A3} z \cos(z\Delta) + A_{B3} \cos(z\Delta) + B_{B3} z \sin(z\Delta)] * f(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(x, y)$ — произвольная функция двух переменных. Стоящие в (4) коэффициенты $A_{A3}, B_{A3}, A_{B3}, B_{B3}; C_{Ai}, C_{Bi}, D_{Ai}, D_{Bi}, i = 1, 2$ зависят от $\partial_1, \partial_2, \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}$. Легко установить равенства:

$$\begin{aligned} \nabla^2[\sin(z\Delta)] &= \nabla^2[\cos(z\Delta)] = 0; & \nabla^2[z \sin(z\Delta)] &= 2\Delta \cos(z\Delta); \\ \nabla^2[z \cos(z\Delta)] &= -2\Delta \sin(z\Delta). \end{aligned}$$

Тогда можно записать:

Задача А.

$$\begin{aligned}
& -2[(k+1)\Delta(D_{A1}\Delta + B_{A3}\partial_1) + k\partial_1(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1D_{A1} + \partial_2D_{A2} - \\
& -A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)]\sin(z\Delta) - 2k\partial_1(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta\cos(z\Delta) = 0 \\
& -2[(k+1)\Delta(D_{A2}\Delta + B_{A3}\partial_2) + k\partial_2(-C_{A1}\partial_1\Delta - C_{A2}\partial_2\Delta + \partial_1D_{A1} + \partial_2D_{A2} - \\
& -A_{A3}\Delta^2 - 2B_{A3}\Delta)]\sin(z\Delta) - 2k\partial_2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\Delta\cos(z\Delta) = 0 \\
& 2(k-1)\Delta(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)\cos(z\Delta) - 4(k+1)B_{A3}\Delta^2\cos(z\Delta) + \\
& + 2k\Delta[(C_{A1}\partial_1 + C_{A2}\partial_2 + A_{A3}\Delta + B_{A3}\Delta)\Delta - 2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3})]\cos(z\Delta) + \\
& + 4k\Delta^2(D_{A1}\partial_1 + D_{A2}\partial_2 - B_{A3}\Delta)z\sin(z\Delta) = 0;
\end{aligned}$$

Задача Б.

$$\begin{aligned}
& 2(k+1)(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_1)\Delta\cos(z\Delta) - \\
& - 2k\partial_1(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2)\cos(z\Delta) + \\
& + 2k\partial_1(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta\sin(z\Delta) = 0 \\
& 2[(k+1)\Delta(-D_{B1}\Delta + B_{B3}\partial_2) - \\
& - 2k\partial_2(C_{B1}\partial_1\Delta + C_{B2}\partial_2\Delta - A_{B3}\Delta^2 + 2B_{B3}\Delta + D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2)\cos(z\Delta) + \\
& + 2k\partial_2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\Delta\sin(z\Delta) = 0 \\
& - 2(k-1)\Delta(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)\sin(z\Delta) - 4(k+1)B_{B3}\Delta^2\sin(z\Delta) + \\
& + 2k\Delta[(C_{B1}\partial_1 + C_{B2}\partial_2 - A_{B3}\Delta + B_{B3})\Delta + 2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3})]\sin(z\Delta) + \\
& + 4k\Delta^2(D_{B1}\partial_1 + D_{B2}\partial_2 + B_{B3}\Delta)z\cos(z\Delta) = 0.
\end{aligned}$$

В результате были получены следующие решения:

$$C_2 = -\frac{\partial_1}{\partial_2}C_1; D_1 = \pm\frac{\partial_1}{\Delta}B_3; D_2 = \pm\frac{\partial_2}{\Delta}B_3; A_3 = \pm\frac{\varepsilon}{\Delta}B_3, \text{ где } \varepsilon = 3 - 4\nu, \Delta = \sqrt{\partial_1^2 + \partial_2^2}. \quad (6)$$

Здесь знак плюс соответствует задаче А, а минус – задаче Б. Знак для коэффициентов C_1 и C_2 остается неизменным.

Полученным результатом можно воспользоваться в дальнейшем при решении конкретных граничных задач в частных производных.

Литература

1. Акимов В. А. *Операторный метод решения задач теории упругости*. Мн.: УП «Технопринт», 2003.
2. Акимов В. А. *Построение бигармонической функции, удовлетворяющей однородным граничным условиям. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения. Материалы IV МНК, посвященной 95-летию со дня рождения Чл.-Корр. АН БССР Иванова Е.А.* Гродно, 17–19 декабря 2019 г. С.41–42.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ (ОМФ) В УРАВНЕНИИ БЕНДЖАМИНА – БОНА – МАХОНИ

И.Е. Андрушкевич

Уравнение Бенджамина – Бона – Махони (ВВМ-уравнение) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad (1)$$

и используется для моделирования длинных волн в дисперсных средах. Количество известных его решений весьма ограничено [1].

Применим обобщенный метод Фурье [2] для построения его аналитических решений. Воспользуемся ОМФ-3, т.е. решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, t) = \{\chi_1(x)\tau_1(t) + \chi_2(x)\tau_2(t) + a\}^{-1}, \quad (2)$$

где $\chi_1, \tau_1, \chi_2, \tau_2$ — неизвестные функции соответствующих переменных, a — $const$.

Подставляя (2) в (1), получаем следующее билинейное функциональное уравнение

$$\sum_1^{17} \psi_i(t)\varphi_i(x) = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) приняты следующие обозначения:

$$\psi_1 = \tau_1, \quad \varphi_1 = \chi_1' b; \quad \psi_2 = \tau_2, \quad \varphi_2 = \chi_2' b; \quad \psi_3 = \tau_1', \quad \varphi_3 = a\chi_1'' b^2 - \chi_1 b^2;$$

$$\psi_4 = \tau_2', \quad \varphi_4 = a\chi_2'' b^2 - \chi_2 b^2; \quad \psi_5 = \tau_1^2, \quad \varphi_5 = \chi_1' \chi_1;$$

$$\psi_6 = \tau_2^2, \quad \varphi_6 = \chi_2' \chi_2; \quad \psi_7 = \tau_1\tau_2, \quad \varphi_7 = \chi_1' \chi_2 + \chi_2' \chi_1;$$

$$\psi_8 = \tau_1\tau_1', \quad \varphi_8 = -2\chi_1^2 b - 4a(\chi_1')^2 b; \quad \psi_9 = \tau_2\tau_2', \quad \varphi_9 = -2\chi_2^2 b - 4a(\chi_2')^2 b;$$

$$\psi_{10} = \tau_1^2\tau_1', \quad \varphi_{10} = -\chi_1^3 - a\chi_1^2\chi_1'' + 2a\chi_1(\chi_1')^2;$$

$$\psi_{11} = \tau_2^2\tau_2', \quad \varphi_{11} = -\chi_2^3 - a\chi_2^2\chi_2'' + 2a\chi_2(\chi_2')^2;$$

$$\psi_{12} = \tau_2^2\tau_1', \quad \varphi_{12} = -4a\chi_1'\chi_2'\chi_2 + 6a\chi_1(\chi_2')^2 + a\chi_1''\chi_2^2 - \chi_1\chi_2^2 - 2a\chi_1\chi_2''\chi_2;$$

$$\psi_{13} = \tau_1^2\tau_2', \quad \varphi_{13} = -4a\chi_2'\chi_1'\chi_1 + 6a\chi_2(\chi_1')^2 + a\chi_2''\chi_1^2 - \chi_2\chi_1^2 - 2a\chi_2\chi_1''\chi_1;$$

$$\psi_{14} = \tau_1\tau_2', \quad \varphi_{14} = -4a\chi_2'\chi_1'b + 2a\chi_2''\chi_1b - 2\chi_2\chi_1b - 2a\chi_2\chi_1''b;$$

$$\psi_{15} = \tau_2\tau_1', \quad \varphi_{15} = -4a\chi_1'\chi_2'b + 2a\chi_1''\chi_2b - 2\chi_1\chi_2b - 2a\chi_1\chi_2''b;$$

$$\psi_{16} = \tau_2\tau_1\tau_1', \quad \varphi_{16} = -2a\chi_1^2\chi_2'' - 2\chi_1^2\chi_2 + 8a\chi_1\chi_1'\chi_2' - 4a(\chi_1')^2\chi_2;$$

$$\psi_{17} = \tau_1\tau_2\tau_2', \quad \varphi_{17} = -2a\chi_2^2\chi_1'' - 2\chi_2^2\chi_1 + 8a\chi_2\chi_2'\chi_1' - 4a(\chi_2')^2\chi_1.$$

Используя алгоритм реализации ОМФ [3], находим, что функции

$$\chi_1(x) = c_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right), \quad \chi_2(x) = c_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{b}}\right), \quad \tau_1(t) = \exp\left(\frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right),$$

$$\tau_2(t) = \exp\left(-\frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right), \quad a = 2\sqrt{c_1c_2}; \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

являются одним из решений уравнения (3).

Окончательно соответствующее решение уравнения ВВМ (1) будет иметь вид

$$u(x, t) = \left\{ c_1 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{b}} - \frac{t}{12\sqrt{b}\sqrt{c_1c_2}}\right) + 2\sqrt{c_1c_2} \right\}^{-1}. \quad (4)$$

Решение (4) впервые получено нами. Более того, ОМФ позволил нам построить как все уже известные аналитические решения уравнения (1), так и ряд принципиально новых.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании нелинейных физических процессов.

Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература" 2002.
2. Андрушкевич И. Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях*. Новополоцк: ПГУ, 2010.
3. Андрушкевич И. Е. *Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида* // Информатика. 2017. № 4. С. 5 – 19.

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В КВАДРАНТЕ

Е.Б. Афанасьева, В.Б. Васильев, О.Ю. Лукинова, А.А. Машинец

Для исследования разрешимости модельных эллиптических псевдодифференциальных уравнений была использована специальная факторизация эллиптического символа [1], при наличии которой удалось получить полную картину разрешимости. Исследование дискретных ситуаций было начато в работе [2] и продолжено в [3,4], где рассматривался случай полупространства. Здесь рассматривается дискретное уравнение в квадранте – простейшей канонической области с негладкой границей.

Пусть \mathbb{Z}^2 обозначает целочисленную решетку на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Мы будем работать с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}, \zeta^2 = h^{-2}((e^{-i\hbar\xi_1} - 1)^2 + (e^{-i\hbar\xi_2} - 1)^2), S(h\mathbb{Z}^2)$ – дискретный аналог пространства Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций.

Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных обобщенных функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ в норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{u}_d(\xi)$ обозначает дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in h\mathbb{T}^2.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, носители которых содержатся в \bar{K}_d . Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Пусть $A_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция, определенная на \mathbb{R}^2 с основным квадратом периодов $h\mathbb{T}^2$. Под дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d мы понимаем оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Говорят, что оператор A_d – эллиптический, если

$$\text{ess} \inf_{\xi \in h\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Здесь мы рассматриваем символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h , и число $\alpha \in \mathbb{R}$ мы называем порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d .

Нас интересует разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in K_d, \quad (1)$$

в пространстве $H^s(K_d)$.

Для символа $A_d(\xi)$ вводится понятие периодической волновой факторизации с индексом \varkappa , при наличии которой удается выписать общее решение уравнения (1).

Мы здесь предполагаем, что $\varkappa - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. К уравнению добавляются дискретное условие на сторонах угла

$$u_d|_{\tilde{x}_1=0} = f_d(\tilde{x}_2), \quad u_d|_{\tilde{x}_2=0} = g_d(\tilde{x}_1). \quad (2)$$

Таким образом, задача (1),(2) – это дискретная задача Дирихле.

Теперь обозначим

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 \equiv \tilde{a}_0(\xi_2), \quad \int_{-h\pi}^{h\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_2 \equiv \tilde{b}_0(\xi_1),$$

и в предположении, что выполнено условие $\tilde{a}_0(\xi_2), \tilde{b}_0(\xi_1) \neq 0, \forall \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_d(\xi_2) &= \tilde{f}_d(\xi_2) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2), & \tilde{G}_d(\xi_1) &= \tilde{g}_d(\xi_1) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), \\ k_1(\xi) &= A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), & k_2(\xi) &= A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2). \end{aligned}$$

В новых обозначениях введем систему двух линейных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $\tilde{c}_0(\xi_1), \tilde{d}_0(\xi_2)$

$$\begin{cases} \int_{-h\pi}^{h\pi} k_1(\xi)\tilde{c}_0(\xi_1)d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2) = \tilde{F}_d(\xi_2) \\ \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-h\pi}^{h\pi} k_2(\xi)\tilde{d}_0(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{G}_d(\xi_1), \end{cases} \quad (3)$$

Доказана эквивалентность задачи (1), (2) системе (3) и однозначная разрешимость системы (3) для достаточно малых h при условии однозначной разрешимости соответствующей системы в непрерывном случае. Дано сравнение дискретных и непрерывных решений.

Литература

1. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи*. М.: КомКнига, 2010.
2. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space* // Math. Model. Anal. 2018. V. 23. № 3. P. 492–506.
3. Васильев В. Б. *Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 160. С. 18–27.
4. Васильев В. Б., Тарасова О. А. *О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 174. С. 12–19.

НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ КАНОНИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В \mathbb{R}^3

А.И. Басик, Е.В. Грищук

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^3 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

Здесь A_j ($j = 1, 2, 3$) – постоянные квадратные действительные матрицы четвертого порядка, $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ – искомая вектор-функция. Под задачей Римана-Гильберта для системы (1) понимают задачу отыскания ее решения класса $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющего граничному условию

$$\mathfrak{B}(\eta)\mathfrak{U} = f(\eta) \quad (\eta \in \partial), \quad (2)$$

где \mathfrak{B} , f – заданные непрерывные по Гельдеру на поверхности $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 и двухкомпонентная вектор-функция соответственно.

В случае, когда (1) является системой Моисила-Теодореску и матрица граничного условия (2) имеет канонический вид

$$\mathfrak{B}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1(y) & \nu_2(y) & \nu_3(y) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

краевая задача Римана-Гильберта является регуляризуемой [1]. Напомним, что задача (1), (2) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [2]. В формуле (3) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$. Отметим, что для систем рассмотренных в работе [3] задача Римана-Гильберта с матрицей граничного условия (3) также является регуляризуемой.

Рассмотрим систему (1), не являющуюся трехмерным аналогом системы Коши – Римана [4], матричные коэффициенты которой имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Теорема. Для системы (1) с коэффициентами (4) справедливы следующие утверждения

- (i) система является эллиптической;
- (ii) каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого решения системы является бигармонической функцией;
- (iii) задача Римана-Гильберта (1), (2) с матрицей граничного условия (3) не является регуляризуемой.

Литература

1. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация задач Римана-Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физмат». Киев. 1975. Вып. 17. С. 184–186.
2. Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 3–120.
3. Басик А. И., Грицук Е. В., Грицук Т. А. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в \mathbb{R}^3 // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56. № 1. С. 7–16.
4. Усс А. Т. Краевая задача Римана-Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 6. С. 10–15.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при изучении разных физических явлений, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения.

Параболические уравнения с оператором Бесселя и с нелокальным интегральным условием изучены в работах [1 – 4].

Пусть $G_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt . В области G_T рассмотрим параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя, $k \leq -1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{G_T}) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_T), \quad (1)$$

$$L_B u = 0, \quad (x, t) \in G_T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$(x^{k-1}u(x, t)) \Big|_{x=1} + \int_0^l u(x, t)xdx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$(x^{k-1}\varphi(x)) \Big|_{x=1} + \int_0^l \varphi(x)xdx = 0. \quad (6)$$

Теорема. *Задача (1) – (6) не может иметь более одного решения.*

Отметим, что в работе [5] была рассмотрена задача (1) – (6) при $0 < k < 1$.

Литература

1. Бенуар Нур-Эддин, Юрчук Н. И. *Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя* // Дифференц. уравнения. 1991. 27:12. С. 2094–2098.
2. Mesloub S. and Bouziani A., *Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator* // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2002. 15:3. P. 277-286.
3. Bouziani A, Oussaeif T.-E. and Benaoua L. *A Mixed Problem with an Integral Two-Space-Variables Condition for Parabolic Equation with The Bessel Operator* // Journal of Mathematics. 2013. Article ID 457631. 8 p.
4. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя* // Вестник российских университетов. 2022. 27:139. С. 231–246.
5. Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М. *О единственности решения одной краевой задачи с интегральным условием для сингулярного параболического уравнения с оператором Бесселя* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022): материалы Международной научной конференции. Новополюцк. Ч.2. Новополюцк: Полоцкий государственный университет. 2022. С. 5-6.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА

В.В. Дайняк

Рассмотрим задачу типа Дирихле на плоскости для уравнений определенного вида третьего порядка с коэффициентами, зависящими от $x = (x_0, x_1)$, в главной части. Эти дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1)$ запишем в виде:

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right) + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \quad (1)$$

где $\mathcal{L}_1(x, D)u = p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda(x)u$. Здесь $a(x)$ – достаточно гладкая функция, а коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)$ и их производные $\frac{\partial p_i(x)}{\partial x_i}$ ($i = 0, 1$) измеримы и ограничены. Ниже будут сформулированы некоторые дополнительные условия оператора \mathcal{L} , которые являются достаточными. С помощью этих условий доказывается однозначная разрешимость уравнения (1) в некоторой области при наличии простейших граничных условий, которые называются условиями типа Дирихле.

Обозначим через Ω произвольную ограниченную область плоскости переменных x с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, а через $n = (n_0, n_1)$ единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{L}_0(n) = n_0^3 + n_0^2 n_1 + a(x)n_0 n_1^2 + a(x)n_1^3$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям типа Дирихле:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \quad (2)$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(n) < 0$.

Вместе с задачей (1)–(2) будем рассматривать и сопряженную задачу:

$$\mathcal{L}^+ v = g(x), \quad (3)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \partial\Omega^+ = \{x \in \Omega | \mathcal{L}_0(n) > 0\}, \quad (4)$$

где \mathcal{L}^+ – оператор, формально сопряженный к оператору \mathcal{L} и

$$\mathcal{L}^+ = -\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\right) + \mathcal{L}_1^+(x, D),$$

\mathcal{L}_1^+ – оператор первого порядка, формально сопряженный к \mathcal{L}_1 .

Введем обозначения: $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева функций, определенных в области Ω с квадратично суммируемыми обобщенными производными до порядка l ($l = 0, 1, 2, 3$). $H_0^l(\Omega)$ – подпространства пространств $H^l(\Omega)$, элементы которых удовлетворяют условиям (2) ((4)). $H_0^{-1}(\Omega)$ – сопряженное к $H_0^1(\Omega)$ пространство относительно канонической билинейной формы (u, v) , $u \in H_0^{-1}(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$, являющейся продолжением по непрерывности билинейной формы $(u, v)_{L_2(\Omega)}$, где $u \in L_2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)$. Заметим, что $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, то есть $(\cdot, \cdot)_{H^0(\Omega)}$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задачи (1)–(2) и (3)–(4) будем рассматривать как решения операторных уравнений

$$\mathcal{L}u = f \quad (5)$$

и

$$\mathcal{L}^+ v = g \quad (6)$$

с областями определения $D(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega)$ и $D(\mathcal{L}^+) = H_0^3(\Omega)$ соответственно.

Построим расширения L и L^+ операторов \mathcal{L} и \mathcal{L}^+ ($L \in H_0^1(\Omega), L^+ \in H_0^{-1}(\Omega)$). В качестве расширений L и L^+ возьмем сопряженные операторы к операторам \mathcal{L}^+ и \mathcal{L} соответственно, действующие из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^{-1}(\Omega)$. Решения уравнений

$$Lu = f, \quad L^+ v = g$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(2) или уравнения (5) и задачи (3)–(4) или уравнения (6) соответственно.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Если выполняется условие $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} + \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} \right) + \lambda(x) > 0$, то для всех $u, v \in H_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < c \|Lu\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} < c^* \|L^+v\|_{H_0^{-1}(\Omega)},$$

где постоянные $c > 0$ и $c^* > 0$ не зависят от функций u и v .

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для всех $f \in H_0^{-1}(\Omega)$ существует и единственно обобщенное решение $u \in H_0^1(\Omega)$ задачи (1)–(2), соответственно для всех $g \in H_0^{-1}(\Omega)$ существует и единственно обобщенное решение $v \in H_0^1(\Omega)$ задачи (3)–(4).

Литература

1. Корзюк В.И., Дайняк В.В., Протьюко А.А. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка // Вестник Белорусского государственного университета. Сер.1. 2012. №3. С.116–121.
2. Дайняк В.В., Корзюк В.И. Задача типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. №6. С.1056–1060.
3. Корзюк В.И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Минск: БГУ, 2013.
4. Корзюк В.И. Уравнения математической физики: курс лекций. Минск, 2008.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г.В. Демиденко, Л.Н. Бондарь

В докладе речь пойдет о разрешимости задачи Коши для класса псевдгиперболических уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), t > 0, \\ D_t^k u|_{t=0} = 0, k = 0, \dots, l-1. \end{cases} \quad (1)$$

Класс псевдогиперболических уравнений был введен в монографии [1]. Уравнения такого типа возникают при моделировании упругих колебаний стержня, балки, в теории волноводов и др. (см., например, [2–4]).

Дадим определение псевдогиперболического уравнения без младших членов

$$L(D_t, D_x)u = f(t, x), \quad (2)$$

где $L(D_t, D_x) = \mathcal{L}_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{L}_{l-k}(D_x)D_t^k$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 1. Символ дифференциального оператора $L(D_t, D_x)$ однороден относительно вектора $(\alpha_0, \alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j$ — натуральные числа:

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^\alpha i\xi) = cL(i\eta, i\xi), \quad c > 0.$$

Условие 2. Оператор $\mathcal{L}_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор.

Условие 3. Уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi) (i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n, \quad (3)$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$.

Определение 1. Уравнение (2) называется псевдогиперболическим, если выполнены условия 1–3.

Мы будем рассматривать строго псевдогиперболические уравнения, в этом случае предполагается, что корни уравнения (3) при $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ различные.

В работах [1–5] установлены условия однозначной разрешимости задачи Коши (1) в соболевских пространствах $W_2^{l,r}((0, T) \times R^n)$, $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$. В частности, было доказано, что при $|\alpha|/2 > 1 - l\alpha_0$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, задача Коши (1) однозначно разрешима для любой

$$f(t, x) \in W_2^{0,s}((0, T) \times R^n) \cap L_2((0, T); L_1(R^n)), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n).$$

При $|\alpha|/2 \leq 1 - l\alpha_0$ необходимы дополнительные условия разрешимости типа условий ортогональности

$$\int_{R^n} x^\beta f(t, x) dx = 0, \quad |\beta| = 0, \dots, N.$$

В настоящем докладе мы изучаем разрешимость задачи Коши (1) в некоторой шкале весовых соболевских пространств $W_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1})$, $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $\gamma > 0$, $\varkappa > 0$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Такой выбор пространств позволяет доказать теоремы об однозначной разрешимости при меньших ограничениях на правую часть уравнения $f(t, x)$.

Определение 2. Будем говорить, что локально суммируемая $u(t, x)$ принадлежит весовому соболевскому пространству

$$W_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1}), \quad r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n), \quad \gamma > 0, \quad \varkappa > 0, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

если $u(t, x)$ имеет обобщенные производные $D_t^k D_x^\beta u$, $k = 0, \dots, l$, $k\alpha_0 + \beta\alpha \leq 1$, при этом $e^{-\gamma t} D_x^\beta u \in L_2(R_+^{n+1})$, $\varkappa \leq \beta\alpha \leq 1$, и

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(\varkappa - \beta\alpha)} e^{-\gamma t} D_x^\beta u, L_2(R_+^{n+1})\| < \infty, \quad 0 \leq \beta\alpha \leq \varkappa,$$

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} D_t^j u, L_2(R_+^{n+1})\| < \infty, \quad j \leq l, \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Норма в пространстве $W_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1})$, определяется как

$$\begin{aligned} \|u(t, x), W_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1})\| &= \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} u, L_2(R_+^{n+1})\| \\ &+ \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma\varkappa} e^{-\gamma t} D_t^l u, L_2(R_+^{n+1})\| + \sum_{\varkappa \leq \beta\alpha \leq 1} \|e^{-\gamma t} D_x^\beta u, L_2(R_+^{n+1})\|. \end{aligned}$$

В частности, при $|\alpha|/2 > 1 - l\alpha_0$ для любой

$$e^{-\gamma t} f(t, x) \in W_2^{0,s}(R_+^{n+1}), \quad s = (\alpha_0/\alpha_1, \dots, \alpha_0/\alpha_n).$$

задача Коши (1) имеет единственное решение в

$$W_{2,\varkappa,\sigma,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1}), \quad r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n), \quad \gamma > 0, \quad \varkappa = 1 - l\alpha_0, \quad \sigma = 1.$$

Исследования выполнены в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни*. Москва-Ленинград: Стройиздат, 1940.
3. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций*. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.
4. Bishop R. E. D. *Longitudinal waves in beams* // *Aeronautical Quarterly*. 1952. V. 3. № 4. P. 280–293.
5. Демиденко Г. В. *Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений* // *Сиб. мат. журн.* 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Денисов, И. В. Денисов

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций, в рамках которого разработаны возможные виды нижних и верхних решений для нелинейных задач, определяющих главные члены угловой части асимптотики решения. Реализация метода предполагает выполнение следующих шагов:

- 1) разбиение области на части;
- 2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
- 3) непрерывная стыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
- 4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Если в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической, то удастся построить барьерные функции, пригодные сразу во всей области. Вид барьерных функций определяются с помощью погранслойных функций, являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, а также с учетом необходимых свойств искомого решения. В результате строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике.

ЗАДАЧА КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, ПОДВЕРГАЮЩЕЙСЯ ИМПУЛЬСНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ В ФИКСИРОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

К.К. Елгондиев

Эластичную мембрану с туго закрепленной границей в положении покоя отождествляют с некоторой областью G , ограниченной кусочно-гладкой жордановой кривой Γ в плоскости OXY [1]. Предположим, что в фиксированные моменты времени $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, такая мембрана подвергается кратковременным возмущениям. Колебания мембраны характеризуется решением $u = u(x, y, t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y), \\ \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G, \end{aligned} \quad (2)$$

и условиями импульсных воздействий

$$\Delta \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \frac{\partial u(x, y, t_k + 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, y, t_k - 0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad k \in N, \quad (3)$$

где $I_k(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in G$, $k \in N$ некоторые действительные функции, а относительно величин t_p , $p \in N$ предполагается, что они удовлетворяют условию $t_m > t_n$ и $t_n \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, а также граничным условиям

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

Решением задачи называется функция

$$u = u(x, y, t) \in C^2_{(x,y),t}(G \times ((0, +\infty) \setminus \{t_k, k \in N\})),$$

непрерывная справа по t в точках импульсных воздействий $t = t_k$, $k \in N$, удовлетворяющая при $t = 0$ начальному условию (2) и при $t = t_k$, $k \in N$, удовлетворяющая условиям импульсных воздействий, а также граничному условию (4) в точках (x, y) кривой Γ . Рассмотрим задачу построения решения задачи (1)-(4) с помощью метода разделения переменных [1].

Решения задачи (1)-(4) для $t \neq t_k$, $k \in N$ представим в виде

$$u(x, y, t) = T(t) V(x, y). \quad (5)$$

Тогда для определения функции $V(x, y)$ имеем однородную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta V(x, y) + \lambda V(x, y) = 0, \quad (6)$$

$$V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (7)$$

где $\lambda = \mu^2$, где μ – действительное число. Эта задача при достаточно общих условиях на G имеет счетное множество собственных значений μ_j , $j = \overline{1, n}$, и соответствующие им собственные функции $V_j(x, y)$.

При $t \neq t_k$, $k \in N$ каждому собственному значению μ_n задачи (6), (7) соответствует решения $T_n(t)$ дифференциального уравнения

$$T_n''(t) + (a\mu_n)^2 T_n(t) = 0, \quad t \neq t_k, \quad (8)$$

с импульсным воздействием

$$\Delta T_n'(t)|_{t=t_k} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G I_k(x, y) V_n(x, y) dx dy, \quad (9)$$

где

$$N(V_n) = \left(\int_G V_n^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

Показано, что решение задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению μ_n , может быть представлено в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(x, y),$$

где явный вид функций $T_n(t)$ находится как решение уравнения (8) с импульсным воздействием (9).

Рассмотрены частные случаи, когда область G представляет собой прямоугольник или круг радиуса R с центром в начале координат.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 2004.
2. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific, 1995.
3. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. *Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2* . Препринт / АН УССР. Ин-т математики. 89.59. Киев. 1989.
4. Samoilenko V. Hr., Yelgondiyev K. K. *On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects* // Journ. Facta Universitatis. 1998. 2 (2). P. 635–639.
5. Елгондиев К. К. *Распространение тепла в однородном шаре по действию импульсных источников* // Докл. АН РУз. 2003. № 1. С. 18–20.
6. Elgondiyev K. K., Kurbanbaev O. O., Matmuratova S. R. *String oscillations with impulsive effects* // Karakalpak Scientific journal. 2020, Vol. 3. P. 46–52.

О ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ – СТОКСА

С.С. Каянович

В данном докладе речь идёт о решении уравнений Навье – Стокса в трубе прямоугольного сечения. Труба со сглаженными углами – на рис. 1.

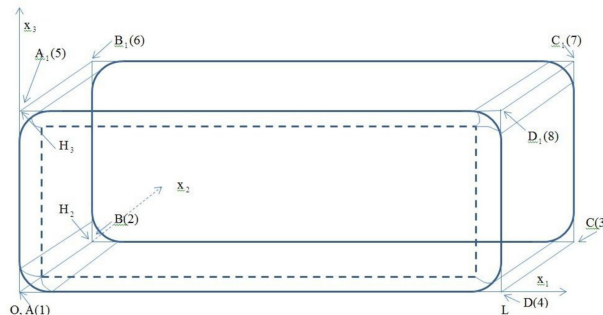


Рис. 1.

Обозначения и граничные условия можно найти в [1], [2], [4].

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (1, 2)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = (1 + \nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_3} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x, t) \in \tilde{\Omega}_T. \quad (4)$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}$, $\tilde{\psi}_1(s, t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$. Тогда при достаточно малых τ задача (1) – (4), в которой производная по времени заменена разностной производной, имеет единственное решение при любом τ , причём $\frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\tilde{\Omega}_m)$.

Теорема 2, Решение из теоремы 1 удовлетворяет всем уравнениям соответствующей системы Навье – Стокса (теорема сформулирована, но не доказана в [3]).

Идея доказательства. Пусть u_1, u_2, u_3, p – решение задачи (1)–(4), существование которого утверждается теоремой 1. В силу выполнения (2), будет

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0$$

и уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_3}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0.$$

Вводя обозначение

$$A = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

и повторяя рассуждения из [4], приходим к утверждению теоремы.

Литература

1. Каянович С.С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. 2015. №1. С. 52-59.
2. Каянович С.С. Метод Рунге для вязкого течения в трубе // «Way-Science». 13-th International Scientific and Practical Internet Conference «Modern Movement of Science»: abstracts of the Conference, 18–19 October, 2021. Ukraine, Dnipro. 2021. P. 133-135.
3. Каянович С.С. О разрешимости модели вязкого течения в трубе // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции. Ч.1. Мн.: ИМ НАН Беларусі, БГУ. 2021. С. 60-61.
4. Каянович С.С. Об уравнениях Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса // Тезисы докладов XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2018). Гродно, Беларусь, 15 – 18 мая 2018 г. Ч.2. Мн.: ИМ НАН Беларусі, БГУ, Гродненский ГУ. 2018. С. 13-15.

ЗАДАЧА ПИКАРА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.И. Корзюк, О.А. Ковнацкая

1. Постановка задачи. На плоскости \mathbb{R}^2 независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}, D) = a(\mathbf{x})\partial_{x_1}^2 u(\mathbf{x}) + 2b(\mathbf{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})\partial_{x_2}^2 u(\mathbf{x}) + \mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ существует константа $L \in \mathbb{R}$, для которой для любых $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ из \mathbb{R}^3 выполняется неравенство

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \mathcal{L}^{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})| \leq L|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|. \quad (2)$$

Условие 2. На всей плоскости \mathbb{R}^2 уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его является положительным, т. е.

$$b^2(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) \geq A > 0 \quad (3)$$

для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ и некоторой константы A из множества действительных чисел \mathbb{R} .

Будем считать, что коэффициент $a(\mathbf{x}) \neq 0$ или $c(\mathbf{x}) \neq 0$ (если $a(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) = 0$, то мы уже имеем второй канонический вид уравнения (1)). Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\mathbf{x})(dx_2)^2 - 2b(\mathbf{x})dx_1dx_2 + c(\mathbf{x})(dx_1)^2 = 0. \quad (4)$$

К уравнению (1) присоединим условия

$$u(\mathbf{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma^{(1)}, \quad (5)$$

$$u(\mathbf{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma^{(2)}, \quad (6)$$

которые задаются на характеристике $\gamma^{(1)} = \{\mathbf{x} \mid \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = C_2^{(0)}\}$ и некоторой линии $\gamma^{(2)} = \{\mathbf{x} \mid x_2 = \mu(x_1)\}$, $\mu \in C^2(\mathbb{R})$, которая выбирается таким образом, чтобы она пересекалась с $\gamma^{(1)}$ только в одной точке $M^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \in \mathbb{R}$, рис. 1.

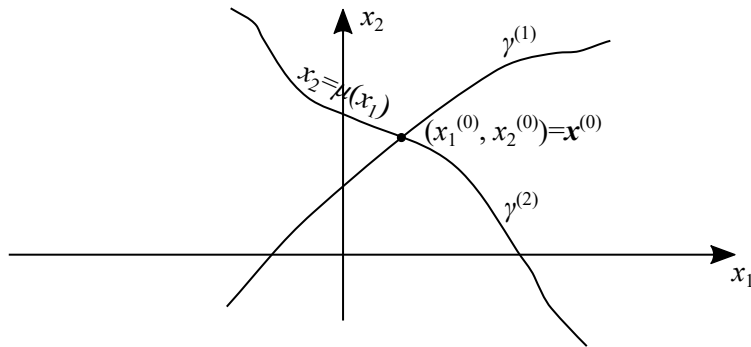


Рис. 1

Здесь $a(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Если $c(\mathbf{x}) \neq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, то линию $\gamma^{(2)}$ можно представить в виде $\gamma^{(2)} = \{\mathbf{x} \mid x_1 = \tilde{\mu}(x_2)\}$, $\tilde{\mu} \in C^2(\mathbb{R})$. Если для некоторых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ $a(\mathbf{x}) = 0$, а для других $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ $c(\mathbf{x}) = 0$, но $a^2(\mathbf{x}) + c^2(\mathbf{x}) \neq 0$, то в этом случае рассматриваем в совокупности предыдущие случаи.

Определение. Функцию u из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ назовем классическим решением задачи (1), (5), (6), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (5), (6).

2. Интегральное уравнение. Пусть $a(\mathbf{x}) \neq 0$ для любых независимых переменных \mathbf{x} на плоскости \mathbb{R}^2 и заданные функции уравнения (1) достаточно гладкие, например, $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}$ являются функциями из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Согласно условию 2 уравнение (4) имеет два семейства характеристик [1]

$$\varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = C_j, \quad j = 1, 2.$$

Через полученные функции делаем замену независимых переменных \mathbf{y} через старые \mathbf{x}

$$y_1 = \varphi^{(1)}(\mathbf{x}), \quad y_2 = \varphi^{(2)}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Замена (7) является невырожденной [1] и $y_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, из (7) имеем обратную замену, т. е.

$$x_j = \tilde{\varphi}^{(j)}(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2.$$

С помощью замены (7) относительно функции $v(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$ уравнение приведет к второму каноническому виду

$$\partial_{y_1} \partial_{y_2} v + \mathcal{L}^{(2)}(\mathbf{y}, v) = g(\mathbf{y}). \quad (8)$$

Условия (5), (6) преобразуются следующим образом:

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(y_2), \quad y_2 \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $y_1 = \nu(y_2)$ – линия, в которую переходит $\gamma^{(2)}$ при замене (7) в системе координат y_1 и y_2 . На линию $\gamma^{(2)}$ налагаем ограничения в виде условия.

Условие 3. Линия $\gamma^{(2)}$ такова, что функция ν из класса $C^2(\mathbb{R})$, имеет обратную функцию $y_2 = \nu^{-1}(y_1)$ и производная $d\nu^{-1} \neq 0$ для любого значения $y_1 \in \mathbb{R}$, рис. 2.

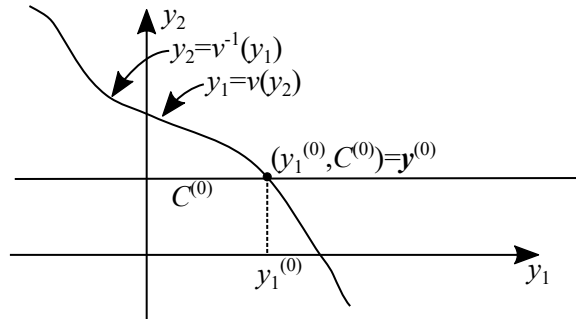


Рис. 2

Так как замена (7) является невырожденной, т. е. якобиан не равен нулю для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, то оператор $\mathcal{L}^{(2)}$ удовлетворяет условию 1, возможно с другой константой L .

Теорема 1. Пусть функции $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)}, j = 1, 2$, из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$, f – из класса $C^1(\mathbb{R}^2)$. Если u является классическим решением задачи (1), (5), (6), то $v(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$ является классическим решением задачи (8)–(10). И наоборот, классическое решение задачи (8)–(10) является классическим решением $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y})$ задачи (1), (5), (6).

Так как u – классическое решение задачи (1), (5), (6), то

$$\psi^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\mathbf{x}^{(0)}). \quad (11)$$

Следовательно, и для решения задачи (8)–(10) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(\mathbf{y}_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \quad (12)$$

Условия согласования (12) (условие (11)) является не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (5), (6) (задачи (8)–(10)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8)–(10).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8)–(10).

Введем дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\mathbf{y}) = w^{(1)}(\mathbf{y}), \quad \partial_{y_2} v(\mathbf{y}) = w^{(2)}(\mathbf{y}),$$

и сведем уравнение (8) к системе интегральных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} w^{(1)}(\mathbf{y}) &= d\xi^{(2)}(y_1) + \int_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z))) dz, \\ w^{(2)}(\mathbf{y}) &= d\xi^{(1)}(y_2) + \int_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2))) dz, \quad (13) \\ v(\mathbf{y}) &= \xi^{(2)} + \int_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z) dz. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, то задача (8)–(10) и система уравнений (13) эквивалентны.

Теорема 3. Если $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, то существует единственное решение $v, w^{(1)}, w^{(2)} \in C(\mathbb{R}^2)$ системы уравнений (13), а также $\partial_{y_1} \partial_{y_2} v \in C(\mathbb{R}^2)$ и функция v является решением задачи (8)–(10).

Литература

1. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. М.: Ленанд, 2021.
2. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 4. С. 391–396.

**ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОЕ
РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ
ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

В. И. Корзюк, И. С. Козловская

Обозначим через $C^k(\bar{Q})$ множество непрерывных функций, для которых непрерывные до порядка k включительно производные, заданных на замыкании \bar{Q} области Q . В данной работе построено в аналитическом виде произвольного порядка k гладкости классическое решение второй смешанной задачи в четверти плоскости для волнового уравнения в классе $C^k(\bar{Q})$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, а также выписаны необходимые и достаточные условия согласования на заданные функции, при выполнении которых существует классическое решение поставленной задачи.

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$, представляющей четверть плоскости двух переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ найти решение u уравнения

$$(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

удовлетворяющие на части границы ∂Q области Q условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2), \quad \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2), \quad x_2 \in [0, \infty), \quad (2)$$

на второй части ∂Q – условиям Неймана

$$\partial_{\nu} u(x_1, 0) = \partial_{x_2} u(x_1, 0) = \mu(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \quad (3)$$

где $\nu = (0, 1)$ – единичный вектор внешней нормали в точках полупрямой $\Gamma = \{\mathbf{x} | x_2 = 0, x_1 \in [0, \infty)\}$, f , φ , ψ , μ – заданные функции на соответствующих областях их определения (1) – (3).

Как известно, решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где произвольные функции $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, из класса C^k и области определения $D(g^{(1)}) = C^k(\mathbb{R})$, $D(g^{(2)}) = C^k([0, \infty))$ для любого $\mathbf{x} \in \bar{Q}$, V_p – частное решение уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$. Для определения V_p характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбивается на две подобласти $Q^{(1)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 < 0\}$. Тогда

$$V_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_p^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$V_p^{(2)}(\mathbf{x}) = v_p^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j. \quad (6)$$

$$v_p^{(1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi - \\ - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2+ax_1} \left(\int_0^\eta f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta, \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\
v_p^{(2)}(\mathbf{x}) = & - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2-ax_1} \left(\int_{ax_1-x_2}^{x_2+ax_1} f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\eta \right) d\xi + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2-ax_1} \left(\int_{-\eta}^\eta f \left(\frac{-\eta-\xi}{2a}, \frac{-\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2-ax_1} \left(\int_0^\eta f \left(\frac{-\eta-\xi}{2a}, \frac{-\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2+ax_1} \left(\int_0^\eta f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta + C^{(1,2)}, \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Функции $g^{(j)}$ ($j = 1, 2$) определяются формулами

$$g^{(2)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi + C, z \in [0, \infty). \tag{8}$$

где C – произвольная постоянная из \mathbb{R} .

$$g^{(1)}(z) = \begin{cases} g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi - C, z \in (0, \infty), \\ g^{(1,2)}(z) = \int_0^z \mu\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi + \frac{1}{2}\varphi(-z) - \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(-\xi) d\xi + \tilde{C}, z \in (-\infty, 0), \end{cases} \tag{9}$$

где \tilde{C} – произвольная постоянная из \mathbb{R} , не зависящая от C .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть заданные функции задачи (1) – (3) удовлетворяют следующим условиям гладкости: $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi, \mu \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$. Для каждого числа $k = 2, 3, 4, \dots$ существует единственное решение $u : \mathbb{R}^2 \supset \bar{Q} \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ задачи (1) – (3) из класса $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования:

$$\begin{aligned}
d^m \varphi(0) - \left(\frac{1}{a}\right)^{m-1} d^{m-1} \mu(0) &= 0, \quad m = 1, 3, \dots \leq k, \\
d^{m-1} \psi(0) - \left(-\frac{1}{a}\right)^{m-2} d^{m-1} \mu(0) &= 0, \quad m = 2, 4, \dots \leq k.
\end{aligned}$$

Решение непрерывно зависит от заданных функций и определяется формулой (4), частное решение V_p – формулами (5), (6), (7), $g^{(j)}$ ($j = 1, 2$) – (8), (9).

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 1.* Минск: БГУ. 2017
2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 2.* Минск: БГУ. 2020
3. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений. Курс лекций в 10 частях. Часть 3.* Минск: БГУ. 2022

СТРУКТУРА ПО ПРАНДТЛЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕПЛОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ СЖИМАЕМОМ ТЕЧЕНИИ

В. Н. Лаптинский

Рассмотрим задачу [1, с. 380], [2, с. 630]

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + u_x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (3)$$

$$u_x|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{y=\delta(x)} = U(x), \quad (4)$$

$$T|_{y=0} = T_0(x), \quad T|_{y=\delta_T(x)} = T_1(x); \quad (5)$$

здесь и далее по тексту знак осреднения опущен.

Соотношения (1) – (5) представляют собой задачу о тепловом пограничном слое конечной толщины $\delta_T(x)$ в турбулентном сжимаемом течении, при этом в полном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ и полной плотности потока тепла $q = q_l + q_t$, согласно гипотезе Л. Прандтля, приняты выражения

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho l^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (6)$$

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (7)$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$, $q_l = \lambda \partial T / \partial y$ – ламинарные составляющие соответственно для τ, q .

Искомыми величинами являются функции $\delta_T(x)$ и $\alpha_0(x)$ – коэффициент теплоотдачи, при этом соотношения (1), (2), (4) представляют собой самостоятельную задачу о динамическом пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$, определению подлежат функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение.

Структура $\delta(x)$, $\tau_0(x)$ в сжимаемом пограничном слое изучена в работе [3]. В случае несжимаемого течения структура $\delta_T(x)$, $\alpha_0(x)$ рассмотрена в [4].

Функции $\delta(x)$, $\delta_T(x)$, $\tau_0(x)$, $\alpha_0(x)$ имеют большое значение в теории пограничного слоя, особенно для движения сжимаемой среды. При таких движениях тепловой пограничный слой играет основную роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения

между движущимся телом и средой, приводит к сильному нагреванию поверхности обтекаемого тела. Расчет этого нагревания представляет собой трудную задачу, особенно для авиационной и космической техники («тепловой барьер») [2, с.17].

Основы полуэмпирической теории теплообмена в турбулентном потоке были заложены Л. Прандтлем и Д. Тейлором [1, с. 7], [2, с. 521]. Однако Л. Прандтль первым предложил свою гипотезу. Вследствие чрезвычайно сложной картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности, решение задачи в строгой математической постановке в настоящее время невозможно. При решении отдельных задач вводится много предложений и упрощающих допущений, поэтому в принятых методах расчета турбулентного теплообмена решающее значение приобретает эксперимент [1, с. 380], [2, с. 520], [5].

В предлагаемой работе на основе метода [6] изучена структура, а также структурные свойства решения комплексной задачи (1) – (7). В [3] с помощью величины ударной вязкости пограничного слоя при сжимаемом течении получены соотношения

$$\delta(x) = \frac{\nu_0}{U} h_\delta, \quad (8)$$

$$\tau_0(x) = \rho_0 U^2 h_\tau, \quad (9)$$

где ν_0 , ρ_0 – значения коэффициента кинематической вязкости и плотности на обтекаемой поверхности,

$$h_\delta = ((c_\tau - c_l)(c_l - \tilde{c}_l))/c_t, \quad (10)$$

$$h_\tau = c_t/((c_\tau - c_l)(c_l - \tilde{c}_l)^2); \quad (11)$$

здесь $c_\tau(x)$, $c_l(x)$, $\tilde{c}_l(x)$, $c_t(x)$ – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_l$, $\bar{\tau}_t$ на промежутке $[0, \delta(x)]$ соответственно напряжений трения τ , τ_l , τ_t .

В случае несжимаемого течения $\tilde{c}_l(x) \equiv 0$, при этом функции c_τ , c_l , c_t принимают вид [7], соответствующий этому течению.

Величины δ , τ_0 на основании (8) – (11) связаны соотношениями

$$\delta\tau_0 = \mu_0 U h_\delta h_\tau = \mu_0 U / (c_l - \tilde{c}_l), \quad (12)$$

$$\delta^2\tau_0 = \nu_0 \mu_0 h_\delta^2 h_\tau = \nu_0 \mu_0 U (c_\tau - \tilde{c}_l) / c_t. \quad (13)$$

На основе (12) имеем величину ударной вязкости \tilde{a} , определяемую формулой

$$\tilde{a} = \frac{\delta\tau_0}{h_\delta h_\tau} = \mu_0 U.$$

Далее наряду с (7) рассмотрим функцию

$$\tilde{q}(x, y) = \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \quad (14)$$

где \tilde{T} – безразмерная температура [1, с.237], $\tilde{T} = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$.

Поскольку $\tilde{q}(x, 0) = \alpha_0(x)$, то целесообразно ввести полную теплоотдачу $\alpha(x, y) = \tilde{q}(x, y)$ турбулентного пограничного слоя при помощи выражения

$$\alpha(x, y) = \alpha_l(x, y) + \alpha_t(x, y), \quad (15)$$

где $\alpha_l = \lambda \partial \tilde{T}(x, y) / \partial y$, $\alpha_t = \rho_p l_1^2(y) |\partial u_x / \partial y| \partial \tilde{T} / \partial y$.

На основе (15) имеем для (1) – (7)

$$\tau_0 = \frac{\mu_0 a_0}{\delta_T^2} F(x), \quad (16)$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_0}{\delta_T} \cdot \frac{1}{(r_l - \tilde{r}_l)}, \quad (17)$$

где $F(x) = (r_\alpha - r_l)/r_t$; здесь r_α , r_l , \tilde{r}_l , r_t – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}_l$, $\bar{\alpha}_t$ на промежутке $[0, \delta_T(x)]$ теплопередач соответственно α , α_l , α_t , при этом r_α , r_l , r_t – являются постоянными величинами для профилей скорости и температуры автомодельного типа [1, с. 354, с. 394], [2, с. 573, с. 604]. В случае несжимаемого течения $\tilde{r}_l = 0$, при этом функции r_α , r_l , r_t принимают вид, соответствующий этому течению [4].

На основании (13), (16), получим формулу типа [8, с. 120], используя $Pr = \nu_0/a_0$,

$$\delta = \delta_T (Pr \cdot H/F)^{1/2}, \quad (18)$$

где $H = h_\delta^2 h_\tau = h_\delta/(c_l - \tilde{c}_l)$.

Аналогично из (12), (16) имеем

$$\delta = \delta_T^2 \frac{U}{a_0} \frac{1}{(c_l - \tilde{c}_l) F}. \quad (19)$$

Поскольку формулы (8), (9) содержат только физические параметры течения, то естественно получить аналогичную структуру для δ_T , α_0 . Из (8), (18) имеем

$$\delta_T = \frac{\nu_0 h_\delta}{U} \left(\frac{F}{Pr \cdot H} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Далее на основании (17), (20) получим

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_0 U}{\nu_0 (r_l - \tilde{r}_l) h_\delta} \left(\frac{Pr \cdot H}{F} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Соотношения (8), (9), (20), (21) описывают структуру решения задачи (1) – (7). Формулы (12), (13), (16) – (19) относятся к структурным свойствам решения, при этом структурные функции являются постоянными в случае профилей скорости и температуры автомодельного типа. Связь между τ_0 и α_0 характеризует выражение, вытекающее из (16), (17),

$$\tau_0 = \frac{\alpha_0^2 \mu_0 a_0}{\lambda_0^2} (r_l - \tilde{r}_l)^2 F.$$

Замечание. Получить точное аналитическое решение задачи принципиально невозможно. Здесь приведена его аналитическая структура и некоторые свойства. Формулы (8), (9), (17), (20) описывают влияние физических параметров задачи на формирование пограничного слоя. Они соответствуют установленным физическим реалиям теории пограничного слоя. Структурные функции могут быть получены с помощью численных методов.

Литература

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдучевский [и др.]. М.: Машиностроение, 1975.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974.
3. Лаптинский В. Н. Структура по Прандтлю решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое в сжимаемом течении жидкости // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы II Междунар. науч.-технич. конф., посвящ. 70-летию ИМИ - ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова". Ижевск. 2022. С. 60-64.
4. Лаптинский В. Н. К задаче о тепловом пограничном слое в турбулентном течении // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы II Междунар. науч.-технич. конф., посвящ. 70-летию ИМИ - ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М.Т. Калашникова". Ижевск. 2022. С. 50-54.
5. Решик Е. У., Соседко Ю. П. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований. М.: Физматлит. 2007.
6. Лаптинский В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.
7. Лаптинский В. Н. Структура по Прандтлю – Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Междунар. науч.-технич. конф. Ижевск, 2021. С. 86–90.
8. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Л.Б. Миронова

Здесь рассматривается уравнение с переменными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) (u_{xxyy} + a_{21}u_{xxy} + a_{12}u_{xyy} + a_{11}u_{xy} + a_{20}u_{xx} + a_{02}u_{yy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u) = 0. \quad (1)$$

Дифференциальный оператор уравнения (1) представляет собой произведение оператора первого порядка и псевдопараболического оператора четвертого порядка. Краевая задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим оператором третьего порядка рассмотрена в [1], где решение построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора третьего порядка. Подобный подход применяется в настоящей работе к уравнению (1). Отметим, что задачи для факторизованных уравнений с операторами Бианки исследованы в работах [2, глава 4], [3], [4].

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, а X, Y — части ∂D , лежащие на осях x, y соответственно. Отрезок характеристики $y = x$, расположенный внутри D , обозначим через M .

Задача. Найти в D функцию, являющуюся в $D \setminus M$ регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u|_{\bar{Y}} = \varphi_1(y), \quad u|_{\bar{X}} = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\bar{Y}} = \psi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\bar{X}} = \psi_2(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\bar{Y}} = \lambda_1(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{\bar{Y}} = \lambda_2(y), \quad \varphi_1, \psi_1, \lambda_1 \in C^2([0, y_1]), \quad \varphi_2, \psi_2, \lambda_2 \in C^2([0, x_1]),$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \psi_1(0) = \varphi_2'(0), \varphi_1'(0) = \psi_2(0), \lambda_1(0) = \varphi_2''(0), \lambda_2(0) = \varphi_1''(0).$$

Получены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи. Решение задачи построено в терминах функции Римана соответствующего псевдопараболического дифференциального оператора четвертого порядка, определение которой приведено, например, в [4, с. 127], [5, с. 139].

Литература

1. Миронова Л. Б. *Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором* // Известия вузов. Математика. 2020. № 8. С. 44–49.
2. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной*. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014.
3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений* // Дифференциальные уравнения. 2010. — Т. 46. № 3. С. 364–371.
4. Миронов А. Н. *Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n -мерном пространстве* // Известия вузов. Математика. 2012. № 1. С. 54–60.
5. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Казанск. матем. об-во, 2001.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ж.А. Отарова, А.Б. Бекиев

Математическое моделирование многих процессов механики, физики, биологии нередко приводит к решению задач с нелокальными условиями. Различные краевые задачи для, в которых краевые условия представлены как соотношения между значениями искомых функций, вычисленные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области исследованы многими авторами. В данной работе рассматривается одна краевая задача с нелокальным граничным условием для уравнения четвертого порядка.

В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}(x, t) + \operatorname{sgn} t \cdot [u_t(x, t) - u_{tt}(x, t)] + b^2 u(x, t) = f(x, t),$$

где b - заданное число, $f(x, t)$ - заданная функция.

Задача. Найти функцию $u(x, t)$ удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad (1)$$

$$Lu(x, t) \equiv f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u_{xx}(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (3)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Система функций

$$X_0(x) = 2x, \quad X_{2k-1}(x) = 2 \sin \lambda_k x, \quad X_{2k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \cos \lambda_k x, \quad (5)$$

$$Y_0(x) = 1, \quad Y_{2k-1}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \sin \lambda_k x, \quad Y_{2k}(x) = 2 \cos \lambda_k x, \quad (6)$$

где $\lambda_k = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$ биортогональная и образуют базис Рисса в $L_2(0, 1)$ [1,2].

Решение задачи ищется в виде ряда составленных из базисных функций Рисса (5). Единственность решения задачи, вытекает из полноты ортонормированных систем (6).

Теорема. Если существует решение задачи (1)–(4), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = \mu_k \cos \frac{1}{2} \mu_k \alpha \cdot sh \frac{1}{2} v_k \beta + v_k \sin \frac{1}{2} \mu_k \alpha \cdot ch \frac{1}{2} v_k \beta \neq 0$$

при всех $k \in N \cup \{0\}$, $v_k = \sqrt{4(\lambda_k^4 + b^2) + 1}$, $\mu_k = \sqrt{4(\lambda_k^4 + b^2) - 1}$, $\lambda_0 = 0$.

Литература

1. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. *The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator* // Computers and Mathematics with Applications. 62 (2011). P. 3884-3893.

2. Кадиркулов Б. Ж. *Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка* // УзМЖ.-Ташкент. 2012. №1. С.74-80.

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ю. Панов

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \quad (1)$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ лишь непрерывен, а симметричная матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i, j = 1, \dots, n$. Также предполагается, что матрица $a(u) \geq 0$ (неотрицательно определена). Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0$. Уравнение (1) можно переписать (по крайней мере - формально) в дивергентной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0,$$

где $A'(u) = a(u)$, а оператор D_x^2 это “дивергенция второго порядка”:

$$D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u), \quad u = u(t, x),$$

что позволяет ввести понятие слабого решения. Мы будем исследовать задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Ввиду вырожденности уравнения, слабое решение задачи (1), (2) может быть не единственно и для корректной постановки этой задачи необходимо рассматривать более узкий класс энтропийных решений. Пусть функция $g(u) \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную на любом отрезке вариацию. Определим ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C \rightarrow C(\mathbb{R})/C$, где C это пространство постоянных функций, в соответствии с равенством

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int_0^u f(s)dg(s), \quad (3)$$

в котором $g(u-) = \lim_{v \rightarrow u-} g(v)$, а интеграл в (3) понимается как

$$\int_0^u f(s)dg(s) = \operatorname{sgn} u \int_{J(u)} f(s)dg(s),$$

где $\operatorname{sgn} u = 1$, $J(u) = [0, u)$, если $u > 0$; $\operatorname{sgn} u = -1$, $J(u) = [u, 0)$, если $u \leq 0$. Заметим, что при $f \in C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g однозначно определяется равенством $T_g(f)'(u) = g(u)f'(u)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем факторизацию матрицы диффузии $a(u)$ вида $a(u) = b^\top(u)b(u)$, где $b(u) = (b_{kj}(u))$, $k \in \overline{1, l}$, $j \in \overline{1, n}$, $-l \times n$ -матрица с ограниченными и измеримыми компонентами $b_{kj}(u)$. Таким образом, справедливы равенства $a_{ij}(u) = \sum_{k=1}^l b_{ki}b_{kj}$. Матрица $b(u)$ может рассматриваться как квадратный корень из $a(u)$. При $l = n$ можно выбрать $b(u) = a(u)^{1/2}$. Напомним понятие энтропийного решения задачи (1), (2), предложенное в работе [1].

Определение. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (кратко - э.р.) задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:

(i) при всех $k = 1, \dots, l$ распределения

$$\operatorname{div}_x B_k(u(t, x)) \in L^2_{loc}(\Pi),$$

где векторы $B_k(u) = (B_{k1}(u), \dots, B_{kn}(u))$ таковы, что $B'_{ki}(u) = b_{ki}(u)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$;

(ii) для любой функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и всех $k = 1, \dots, l$

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u(t, x)) = g(u(t, x))\operatorname{div}_x B_k(u(t, x)) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \quad (4)$$

(iv) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} |u(t, \cdot) - u_0| = 0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

В случае законов сохранения $a(u) \equiv 0$ понятие э.р. сводится к известному понятию обобщенного энтропийного решения в смысле С.Н. Кружкова [2].

Если в (4) ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, а в начальном условии (iv) заменить $|u(t, \cdot) - u_0|$ на $(u(t, \cdot) - u_0)^+$ ($(u(t, \cdot) - u_0)^-$), то получим понятия энтропийного субрешения (э.субр.) и энтропийного суперрешения (э.суперр.) задачи (1), (2). Нетрудно проверить, что э.р. задачи (1), (2) является э.субр. и э.суперр. этой задачи одновременно.

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $u_1 = u_1(t, x)$ – э.субр., а $u_2 = u_2(t, x)$ – э.суперр. задачи (1), (2). Тогда $u_1(t, x) \leq \text{ess sup } u_0(x)$, $u_2(t, x) \geq \text{ess inf } u_0(x)$ п.в. на Π (принципы максимума/минимума).

Теорема 2. Максимум конечного множества э.субр. задачи (1), (2) также является э.субр. этой задачи. Соответственно, минимум конечного множества э.суперр. задачи (1), (2) является э.суперр. этой задачи.

С помощью Теоремы 2 устанавливается следующий результат.

Теорема 3. Существует наибольшее э.субр. u_+ и наименьшее э.суперр. u_- задачи (1), (2). Эти функциями являются и э.р. этой задачи.

Таким образом, u_+ , u_- совпадают, соответственно, с наибольшим и наименьшим э.р. задачи (1), (2), существование которых установлено в [3]. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом общем случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а матрица диффузии может вырождаться даже для э.р. свойство единственности может быть нарушено. Так что в общем случае $u_+ \neq u_-$.

В изотропном случае, когда матрица диффузии скалярна, Теоремы 1,2 вытекают из результатов [4,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00344.

Литература

1. Chen G.-Q., Perthame B. *Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations* // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. Vol. 2. P. 645–668.
2. Кружков С.Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Математ. сборник. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
3. Panov E. Yu. *On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations* // J. Differential Equations. 2021. Vol. 275. P. 139–166.
4. Panov E. Yu. *To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations* // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 4, No. 16. P. 9387–9404.
5. Панов Е. Ю. *К теории энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2020. Т. 66. № 2. С. 292–313.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА В ЦИЛИНДРЕ

И.И. Столярчук

Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = \{\mathbf{x} = (x_0, \mathbf{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \mathbf{x}' \in \Omega\}$ где $\Omega = \{\mathbf{x}' : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерный шар в четырёхмерном пространстве, относительно неизвестной

функции $u : \mathbb{R}^4 \supset Q \rightarrow u(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}$ задаётся уравнение типа Клейна-Гордона-Фока с постоянным коэффициентом $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta_{\mathbf{x}'} u - \lambda u = 0, \quad (1)$$

где \mathbb{R} – множество действительных чисел, $\Delta_{\mathbf{x}'} = \sum_{j=1}^3 \partial^2 / \partial x_j^2$ – оператор Лапласа. Отметим, что при $\lambda \equiv 0$ уравнение (1) сводится к волновому, которое рассмотрено в работе [1].

К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\mathbf{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\mathbf{x}'), \quad (2)$$

где $\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \varphi(\mathbf{x}') \subset \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \psi(\mathbf{x}') \subset \mathbb{R}$ – заданные функции. На боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$ задаётся граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \mu(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\mu : \mathbb{R}^4 \supset \Gamma \rightarrow \mu(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}$ – заданная функция.

Применяя оператор осреднения $M_r u(\mathbf{x}) = r J_u(\mathbf{x}, r)$, где $J_u(\mathbf{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{y}|=1} u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}$, получаем эквивалентную задачу для одномерного уравнения типа Клейна-Гордона-Фока

$$\partial_{x_0}^2 M_r u(x_0, \mathbf{x}') - a^2 \partial_r^2 M_r u(x_0, \mathbf{x}') - \lambda M_r u(x_0, \mathbf{x}') = 0, \quad (4)$$

с условиями

$$M_r u|_{x_0=0} = M_r \varphi(\mathbf{x}') = \bar{\varphi}(r), \quad M_r \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = M_r \psi(\mathbf{x}') = \bar{\psi}(r) \quad (5)$$

и граничные условия

$$M_r u|_{r=r_N} = \bar{\mu}(x_0) = r_N \tilde{J}_{\mu}(x_0, \mathbf{x}', r_N), \quad M_r u|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (6)$$

Для задачи (4)–(6) в работе [2] доказана теорема о её разрешимости.

Теорема 1. *Классическое решение задачи (4)–(6) существует и единственно в классе C^3 тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}(r) \in C^3([0, r_N])$, $\bar{\psi}(r) \in C^2([0, r_N])$, $\bar{\mu}(x_0) \in C^3([0, +\infty))$ и выполняются условия согласования*

$$\bar{\varphi}(0) = 0, \quad \bar{\psi}(0) = 0, \quad d^2 \bar{\varphi}(0) = 0, \quad d^2 \bar{\psi}(0) = 0, \quad \bar{\varphi}(r_N) = \bar{\mu}(0), \quad \bar{\psi}(r_N) = d\bar{\mu}(0),$$

$$d^2 \bar{\mu}(0) = a^2 d^2 \bar{\varphi}(r_N) + \lambda \bar{\varphi}(r_N), \quad d^3 \bar{\mu}(0) = a^2 d^2 \bar{\psi}(l) + \lambda \bar{\psi}(r_N).$$

Для задачи (1)–(3) справедлива теорема о существовании единственного классического решения

Теорема 2. *Пусть $\varphi(\mathbf{x}') \in C^3(\bar{\Omega})$, $\psi(\mathbf{x}') \in C^2(\bar{\Omega})$, $\mu(\mathbf{x}) \in C^3(\Gamma)$. Классическое решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^2(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \varphi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} = \frac{r_N}{R} \int_{\mathbf{x}'-\mathbf{y}' \in S(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', r_N)} \mu(0, \mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'},$$

$$\int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \psi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} = \frac{r_N}{R} \int_{\mathbf{x}'-\mathbf{y}' \in S(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', r_N)} \partial_{x_0} \mu(0, \mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'},$$

$$\lambda \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \varphi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} + a^2 \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \Delta\varphi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} = \frac{r_N}{R} \int_{\mathbf{x}'-\mathbf{y}' \in S(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', r_N)} \partial_{x_0}^2 \mu(0, \mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'},$$

$$\lambda \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \psi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} + a^2 \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}'|=r_N} \Delta\psi(\mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'} = \frac{r_N}{R} \int_{\mathbf{x}'-\mathbf{y}' \in S(\mathbf{x}'-\mathbf{y}', r_N)} \partial_{x_0}^3 \mu(0, \mathbf{y}') ds_{\mathbf{y}'}$$

Литература

1. Корзюк В. И., Столярчук И. И. *Классическое решение первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1353–1359.
2. Корзюк В. И., Столярчук И. И. *Произвольной гладкости классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2022. Т. 58. № 1. С. 34–47.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРВЫХ КОСЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЦАХ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

Изучается характеристическая смешанная задача для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in G = [0, d] \times [0, \infty), d > 0, \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), x \in [0, d], \quad (2)$$

и нестационарных граничных условиях

$$\begin{aligned} & [\alpha_1(t)(u_t(x, t) + a_1 u_x(x, t)) + \gamma_1(t)u(x, t)]|_{x=0} = \mu_1(t), \\ & [\alpha_2(t)(u_t(x, t) + a_1 u_x(x, t)) + \gamma_2(t)u(x, t)]|_{x=d} = \mu_2(t), t > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты граничных условий α_i, γ_i – m раз непрерывно дифференцируемые функции переменной t , $i = 1, 2$, исходные данные смешанной задачи $f, \varphi, \psi, \mu_1, \mu_2$ – заданные функции своих переменных x, t и постоянные коэффициенты уравнения $a_1 > 0, a_2 > 0$. Мы обозначаем частные производные соответствующих порядков от искомой функции u нижними индексами по указанным переменным, а символом $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве плоскости $\Omega \subset R^2, R = (-\infty, +\infty)$.

Требуется найти в явном виде формулы классического решения $u \in C^2(G)$, вывести необходимые и достаточные требования гладкости на данные смешанной задачи $\varphi, \psi, f, \alpha_i, \gamma_i, \mu_i, i = 1, 2$, и установить условия согласования между начальными и граничными условиями и уравнением для однозначной и устойчивой везде разрешимости смешанной задачи (1)–(3).

Идея вывода формул классического решения и доказательства критерия корректности задачи (1)–(3) состоит в следующем. На первом этапе решаются и находятся критерии корректности вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны.

Для таких задач критерий корректности уже получен в [1] для $m = 2$, и в [2, 3] для всех целых $m \geq 2$. Затем методом вспомогательных смешанных задач из [4] решается и выводится критерий корректности характеристической задачи (1)–(3) уже для ограниченной струны. Настоящая работа на основе характеристических первых косых производных (3) обобщает результаты, полученные в [5] с нехарактеристическими первыми косыми производными на концах струны.

Литература

1. Ломовцев, Ф. Е., Устилко Е. В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии.* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2018. № 4 (101). С. 18–28.
2. Ломовцев, Ф. Е., Устилко Е. В. *Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений.* // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. № 2 (56). 2020. С. 21–36.
3. Устилко Е. В., Ломовцев, Ф. Е., *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения.* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.
4. Ломовцев, Ф. Е. *Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны.* // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : матер. Междунар. мат. конф. Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 74–75.
5. Новиков, Е. Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными.* : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. Институт математики НАН Беларуси. Минск, 2017.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ЧЕТВЕРТИ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Шеметова

В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$(I - \Delta)D_t^2 u + \Delta^2 u - a^2 \Delta u = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, & D_t u|_{t=0} &= 0, \\ u|_{x_n=0} &= 0, & D_{x_n}^2 u|_{x_n=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, I – тождественный оператор и $a \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) относится к классу псевдогиперболических уравнений. Этот класс был введен в монографии [1]. Подобные уравнения в литературе часто называют уравнениями соболевского типа, так как именно в работах С. Л. Соболева были впервые исследованы уравнения, не разрешенные относительно старшей производной [2]. К дифференциальному уравнению (1) сводятся уравнения, возникающее при моделировании крутильных [3] или продольных [4] колебаний упругих стержней. Построение решения $u(t, x)$ задачи (1), (2) и доказательство единственности проведено в анизотропном весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^{n+1})$. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой*

$$f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(R_{++}^{n+1}), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t, x)|_{t=0} = 0,$$

задача (1), (2) однозначно разрешима в соболевском пространстве функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_{++}^{n+1})$, и для решения $u(t, x)$ выполняется оценка:

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^{n+1})\| \leq c(\gamma_0) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,0}(R_{++}^{n+1})\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t, x)$.

Теорема 2. Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой

$$f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_{++}^{n+1}), \quad \gamma > \gamma_0,$$

задача (1), (2) однозначно разрешима в соболевском пространстве функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_{++}^{n+1})$, и для решения $u(t, x)$ выполняется оценка:

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^{n+1})\| \leq c(\gamma_0) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_{++}^{n+1})\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t, x)$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение №075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Соболев С. Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т.18 № 1. С. 3–50.
3. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни*. Москва-Ленинград: Стройиздат. 1940.
4. Bishop R.E.D. *Longitudinal waves in beams* // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3. № 4. P. 280–293.

COMPARISON PRINCIPLE FOR INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR NONLOCAL PARABOLIC EQUATION

A.L. Gladkov

Let $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$, $T > 0$.

We consider the initial boundary value problem for nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + au^p \int_{\Omega} u^q(y, t) dy - bu^m, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T, \quad (2)$$

and initial datum

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

where a, b, p, q, m, l are positive numbers, Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^N for $N \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$.

We suppose that the functions $k(x, y, t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$k(x, y, t) \in C(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, +\infty)), \quad k(x, y, t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_0(x) \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int_{\Omega} k(x, y, 0) u_0^l(y) dy \text{ on } \partial\Omega.$$

Initial boundary value problem for parabolic equation (1) with nonlocal boundary condition

$$u(x, t) = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad (x, t) \in S_T$$

was considered in [1, 2].

Definition. We say that a nonnegative function $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ is a supersolution of (1)–(3) in Q_T if

$$u_t \geq \Delta u + au^p \int_{\Omega} u^q(y, t) dy - bu^m, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \geq \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T, \quad (5)$$

$$u(x, 0) \geq u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

and $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ is a subsolution of (1)–(3) in Q_T if $u \geq 0$ and it satisfies (4)–(6) in the reverse order. We say that $u(x, t)$ is a solution of problem (1)–(3) in Q_T if $u(x, t)$ is both a subsolution and a supersolution of (1)–(3) in Q_T .

Theorem 1. Let \bar{u} and \underline{u} be a supersolution and a subsolution of problem (1)–(3) in Q_T , respectively. Suppose that $\underline{u}(x, t) > 0$ or $\bar{u}(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if $\min(p, q, l) < 1$. Then $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$ in $Q_T \cup \Gamma_T$.

Remark. We improve a comparison principle in [3]. The authors of [3] supposed that $\underline{u}(x, t) > 0$ or $\bar{u}(x, t) > 0$ in $Q_T \cup \Gamma_T$ if $\min(m, p, q, l) < 1$.

Theorem 2. Let $u_0 \not\equiv 0$ in Ω , $m \geq 1$. Suppose u is a solution of (1)–(3) in Q_T . Then $u > 0$ in $Q_T \cup S_T$.

The results of the talk have been published in [4].

Acknowledgement. This work is supported by the state program of fundamental research of Belarus (grant 1.2.03.1).

References

1. Gladkov A.L., Kavtova T.V. *On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition* // Math. Methods Appl. Sci. 2020. Vol. 43. № 1. P. 5464–5479.
2. Gladkov A.L., Kavtova T.V. *On the initial-boundary value problem for a nonlocal parabolic equation with nonlocal boundary condition* // J. Belarus. State Univ. Math. Inform. 2018. № 1. P. 29–38.
3. Wang J., Yang H. *Properties of solutions for a reaction-diffusion equation with nonlinear absorption and nonlinear nonlocal Neumann boundary condition* // Bound. Value Probl. 2018. № 143. 1–14.
4. Gladkov A.L. *Global existence and blow-up of solutions of nonlinear nonlocal parabolic equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition* // arXiv:2208.05731. 2022. 13 pp.

CURVILINEAR PARALLELOGRAM IDENTITY AND MEAN-VALUE PROPERTY FOR A SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATION OF SECOND ORDER

V.I. Korzyuk, and J.V. Rudzko

In the domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ of two independent variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ consider the semilinear hyperbolic equation of second-order

$$Au(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, u(x_1, x_2), \partial_{x_1}u(x_1, x_2), \partial_{x_2}u(x_1, x_2)), \quad (1)$$

where the operator A is defined as

$$Au(x_1, x_2) := a(x_1, x_2)\partial_{x_1}^2 u(x_1, x_2) + 2b(x_1, x_2)\partial_{x_1}\partial_{x_2}u(x_1, x_2) + c(x_1, x_2)\partial_{x_2}^2 u(x_1, x_2),$$

and is hyperbolic (this means $b^2(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) > 0$ for any $x \in \Omega$).

Eq. (1) has two families of characteristics: $\gamma_1(x_1, x_2)$ and $\gamma_2(x_1, x_2)$, which are the first integrals of the ordinary differential equation [1]

$$a(\mathbf{x})(dx_2)^2 - 2b(\mathbf{x})dx_1dx_2 + c(\mathbf{x})(dx_1)^2 = 0, \quad (2)$$

and solutions of the equation of characteristics [1]

$$a \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_1} \right)^2 + 2b \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_2} + c \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_2} \right)^2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

It is known [1] that Eq. (2), generally speaking, can be decomposed into two equations. Therefore, we can assume that γ_1 and γ_2 are the first integrals of different differential equations and they are functionally independent since the Jacobian $\left| \frac{\partial(\gamma_1, \gamma_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|$ is nonzero [1].

Definition 1. Curvilinear characteristic parallelogram of Eq. (1) is a set $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2] \wedge \gamma_2(\mathbf{x}) \in [r_1, r_2]\}$, where l_1, l_2, r_1, r_2 are some real numbers and $\gamma_i, i = 1, 2$ are two different functionally independent characteristics.

Definition 1 is correct. It is known [2] that any other the first integral of Eq. (2) has the form $q \circ \gamma_1$, where q is some continuously differentiable function. If $\gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2]$, then, due to the continuity of q , $q(\gamma_1(\mathbf{x})) \in q([l_1, l_2]) = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$. So the curvilinear characteristic parallelogram does not depend on considered characteristics.

Definition 2. Vertices of the curvilinear characteristic parallelogram $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2] \wedge \gamma_2(\mathbf{x}) \in [r_1, r_2]\}$ are points \mathbf{x} such that $\gamma_1(x) = l_i \wedge \gamma_2(x) = r_j, (i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$.

Definition 2 is correct. We should show that $q \circ \gamma_1$, where q is some continuously differentiable function, maps $[l_1, l_2]$ into $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$ and $\partial([l_1, l_2])$ into $\partial([\tilde{l}_1, \tilde{l}_2])$. Obviously, if the function q is increasing or decreasing these mappings must be true. But if the the function q does not satisfy these conditions, then there exists at least one point $l_0 \in (l_1, l_2)$ such that $q'(l_0) = 0$. Due to the continuity of q , there exists a point $\mathbf{x} \in \Pi$ such that $\gamma_1(\mathbf{x}) = l_0 \in (l_1, l_2)$ This implies

$$\left| \frac{\partial(q \circ \gamma_1, \gamma_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|(\mathbf{x}) = \left| \begin{array}{cc} q'(\gamma_1(\mathbf{x}))\partial_{x_1}\gamma_1(\mathbf{x}) & q'(\gamma_1(\mathbf{x}))\partial_{x_2}\gamma_1(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1}\gamma_2(\mathbf{x}) & \partial_{x_2}\gamma_2(\mathbf{x}) \end{array} \right| = 0 \text{ when } \gamma_1(\mathbf{x}) = l_0.$$

But we consider only characteristics with nonzero Jacobian.

Definition 3. Opposite vertices of the curvilinear characteristic parallelogram $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2] \wedge \gamma_2(\mathbf{x}) \in [r_1, r_2]\}$ are its vertices \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 such that $\gamma_1(\mathbf{x}_1) \neq \gamma_1(\mathbf{x}_2)$ and $\gamma_2(\mathbf{x}_1) \neq \gamma_2(\mathbf{x}_2)$.

Point transformation of variables of the form $y_1 = \gamma_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \gamma_2(x_1, x_2)$ is invertible [3], i.e. there is an inverse change of variables $x_1 = \gamma_1^{-1}(y_1, y_2)$, $x_2 = \gamma_2^{-1}(y_1, y_2)$.

Let us introduce the notation

$$\begin{aligned} \beta &= 2(a\partial_{x_1}\gamma_1\partial_{x_1}\gamma_2 + b(\partial_{x_2}\gamma_2\partial_{x_1}\gamma_1 + \partial_{x_2}\gamma_1\partial_{x_1}\gamma_2) + c\partial_{x_2}\gamma_1\partial_{x_2}\gamma_2), \\ K(\mathbf{z}, p, q, r) &= f(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z}), p, q, r) - \\ &\quad - A\gamma_1(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z}))(q\partial_{y_1}\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}) + r\partial_{y_1}\gamma_2^{-1}(\mathbf{z})) - \\ &\quad - A\gamma_2(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z}))(q\partial_{y_2}\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}) + r\partial_{y_2}\gamma_2^{-1}(\mathbf{z})), \\ \tilde{K}(\mathbf{z}, p, q, r) &= (\beta(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z})))^{-1}K(\mathbf{z}, p, q, r) \end{aligned}$$

Theorem 1. Let the conditions $a \in C^2(\Omega)$, $b \in C^2(\Omega)$, $c \in C^2(\Omega)$, $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, and $b^2(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) > 0$ be satisfied, and let the function u belong to the class $C^2(\Omega)$ and be a solution of Eq. (1). Then for any curvilinear characteristic parallelogram $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2] \wedge \gamma_2(\mathbf{x}) \in [r_1, r_2]\} \subseteq \Omega$ with vertices $A(\gamma_1^{-1}(l_1, r_1), \gamma_2^{-1}(l_1, r_1))$, $B(\gamma_1^{-1}(l_1, r_2), \gamma_2^{-1}(l_1, r_2))$, $C(\gamma_1^{-1}(l_2, r_2), \gamma_2^{-1}(l_2, r_2))$, $D(\gamma_1^{-1}(l_2, r_1), \gamma_2^{-1}(l_2, r_1))$, the equality

$$\begin{aligned} u(A) - u(B) + u(C) - u(D) &= \\ &= \int_{l_1}^{l_2} dz_1 \int_{r_1}^{r_2} \tilde{K}(\mathbf{z}, u(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z})), \partial_{x_1}u(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z})), \partial_{x_2}u(\gamma_1^{-1}(\mathbf{z}), \gamma_2^{-1}(\mathbf{z}))) dz_2 \end{aligned} \quad (3)$$

holds.

Theorem 2. Let the conditions $u \in C^2(\Omega)$, $a \in C^2(\Omega)$, $b \in C^2(\Omega)$, $c \in C^2(\Omega)$, $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, and $b^2(\mathbf{x}) - a(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) > 0$ be satisfied. If for any curvilinear characteristic parallelogram $\Pi = \{\mathbf{x} \mid \gamma_1(\mathbf{x}) \in [l_1, l_2] \wedge \gamma_2(\mathbf{x}) \in [r_1, r_2]\} \subseteq \Omega$ with vertices $A(\gamma_1^{-1}(l_1, r_1), \gamma_2^{-1}(l_1, r_1))$, $B(\gamma_1^{-1}(l_1, r_2), \gamma_2^{-1}(l_1, r_2))$, $C(\gamma_1^{-1}(l_2, r_2), \gamma_2^{-1}(l_2, r_2))$, $D(\gamma_1^{-1}(l_2, r_1), \gamma_2^{-1}(l_2, r_1))$, where γ_i , $i = 1, 2$ are solutions of Eqs. (2) and γ_i^{-1} are defined as before, the equality (3) is satisfied, then the function u is a solution of Eq. (1).

The talk is based on a recent paper [4].

References

1. Korzuyk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Editorial URSS, 2021.
2. Amel'kin V. V. *Differential Equations*. Minsk, BSU, 2012.
3. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005.
4. Korzuyk V. I. Rudzko J. V. *Curvilinear Parallelogram Identity and Mean-Value Property for a Semilinear Hyperbolic Equation of Second-Order*. arXiv:2204.09408
5. John F. *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*. New York, Springer, 1985.
6. Meshkov V. Z., Polovinkin I. P. *Mean Value Properties of Solutions of Linear Partial Differential Equations* // J. Math. Sci. 2009. Vol. 160. P. 45–52.
7. Meshkov V. Z., Polovinkin I. P. *On the Derivation of New Mean-Value Formulas for Linear Differential Equations with Constant Coefficients* // Differential Equations. 2011. Vol. 47. № 12. P. 1746–1753.

8. Polovinkin I. P. *Mean Value Theorems for Linear Partial Differential Equations* // J. Math. Sci. 2014. Vol. 197. № 3. P. 399–403.

9. Kuznetsov N. *Mean Value Properties of Solutions to the Helmholtz and Modified Helmholtz Equations* // J. Math. Sci. 2021. Vol. 257. № 5. P. 673–683.

10. Kuznetsov N. *Asymptotic Mean Value Properties of Meta- and Panharmonic Functions* // J. Math. Sci. 2021. Vol. 259. № 2. P. 205–209.

11. Polovinkin I. P., Polovinkina M. V. *Mean Value Theorems and Properties of Solutions of Linear Differential Equations*. In: Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. (Eds. V. Kravchenko, S. Sitnik) Cham, Birkhäuser, 2020. P. 587–602.

12. Pokrovskii A. V. *Mean Value Theorems for Solutions of Linear Partial Differential Equations* // Mathematical Notes. 1998. Vol. 64. № 2. P. 220–229.

13. Hörmander L. *Asgeirsson's Mean Value Theorem and Related Identities* // Journal of Functional Analysis. 2001. Vol. 184. № 2. P. 377–401.

REDUCTION OF SOME EVOLUTIONARY EQUATIONS BY MEANS OF SYMMETRIES

D. S. Zhalukevich

Reversible transformations for partial differential equations in the case of two independent variables t, x and one dependent variable $u = u(t, x)$, have the form [1-4]

$$\tilde{t} = \varphi(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{x} = \psi(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{u} = \chi(t, x, u, \varepsilon), \quad (1)$$

where

$$\varepsilon \in \mathbb{R},$$

with

$$\varphi(t, x, u, 0) = t, \quad \psi(t, x, u, 0) = x, \quad \chi(t, x, u, 0) = u. \quad (2)$$

The construction of the symmetry group is equivalent to the definition of its infinitesimal transformations

$$\tilde{t} = t + \varepsilon\tau(t, x, u) + \dots, \quad \tilde{x} = x + \varepsilon\xi(t, x, u) + \dots, \quad \tilde{u} = u + \varepsilon\eta(t, x, u) + \dots, \quad (3)$$

where

$$\tau(t, x, u) = \frac{\partial\varphi(t, x, u, 0)}{\partial\varepsilon}, \quad \xi(t, x, u) = \frac{\partial\psi(t, x, u, 0)}{\partial\varepsilon}, \quad \eta(t, x, u) = \frac{\partial\chi(t, x, u, 0)}{\partial\varepsilon}. \quad (4)$$

Consider the k -th order evolutionary equations:

$$u_t + A_0(t, x, u) + \sum_{i=1}^k A_i(t, x, u)u_{ix} = 0, \quad (5)$$

where

$$u_{ix} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \quad k = 2, 3, 4.$$

Theorem. For equation (5), the symmetry transformations (1) have the form

$$\tilde{t} = \varphi(t, \varepsilon), \quad \tilde{x} = \psi(t, x, \varepsilon), \quad \tilde{u} = \chi(t, x, u, \varepsilon), \quad (6)$$

this means that one can search for infinitesimal symmetries in the form

$$X = \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7)$$

where

$$\eta = b(t, x)u + c(t, x). \quad (8)$$

Among the equations (5), the following equations are found that can be reduced [5-23]:

$$u_t + u^n u_x + f(t, x)u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

$$u_t + u^n u_x + (f(t, x)u)_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

$$u_t + u^n u_x + f(t, x)u_{xx} + g(t, x)u_{xxx} + h(t, x)u_{xxxx} = 0, \quad (11)$$

$$u_t + u^n u_x + (f(t, x)u)_{xx} + (g(t, x)u)_{xxx} + (h(t, x)u)_{xxxx} = 0, \quad (12)$$

$$u_t + q(t, x)u^n u_x + u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$u_t + (q(t, x)u^{n+1})_x + u_{kx} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

The equation (9) for $n = 1$ and $k = 2$ is called the homogeneous Burgers equation; for $n > 1$ and $k = 2$, the homogeneous convection-diffusion equation; for $n = 1$ and $k = 3$, the homogeneous Korteweg-de equation For $n > 1$ and $k = 3$ homogeneous modified Korteweg-De Vries equation; for $n = 1$ and $k = 4$ homogeneous generalized Burgers-Korteweg-de Vries equation; for $n > 1$ and $k = 4$ homogeneous generalized modified the Burgers-Korteweg-de Vries equation.

The equation (11) for $n = 1$ and $h = 0$ is called the homogeneous Burgers-Korteweg-de Vries equation; for $n > 1$ and $h = 0$, the homogeneous modified Burgers-Korteweg-De Vries equation; for $n = 1$, the homogeneous equation Kuramoto-Sivashinsky; for $n > 1$ by a homogeneous modified Kuramoto-Sivashinsky equation.

References

1. Hydon P.E. *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide* Cambridge University Press, 2000.
2. Ibragimov N.H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Reidel, Dordrecht, 1985.
3. Ovsianikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations* Academic, New York, 1982.
4. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* Springer-Verlag, New York, 1993, 2nd edition, Graduate Texts Math., vol. 107.
5. Clarkson P.A., Winternitz, P. *Symmetry Reduction and Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. In: Conte, R. (eds) *The Painleve Property*. CRM Series in Mathematical Physics. Springer, New York, NY, 2002.
6. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R. *Group analysis of general Burgers-Korteweg-de Vries equations* // Journal of Mathematical Physics, 2017.
7. Clarkson P.A. *Dimensional reductions and exact solutions of a generalized nonlinear Schrodinger equation* // Nonlinearity. 1992. 5. 453-472.
8. Clarkson P.A. *Nonclassical symmetry reductions of nonlinear partial differential equations* // Math. Comp. Model. 1993. 18. 45-68.
9. Clarkson P.A. *Nonclassical symmetry reductions of the Boussinesq equation* // Chaos, Solitons and Fractals. 1995. 5. 2261-2301.

10. Clarkson P.A., Hood S. Nonclassical symmetry reductions and exact solutions of the Zabalotskaya-Khokhlov equation. // *Europ. J. Appl. Math.* 1992. 3. 381-414.
11. Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. *The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations* // *Meth. Appl. Anal.* 1997. 4. 173-195.
12. Clarkson P.A., Mansfield E.L. *Symmetry Reductions and Exact Solutions of a class of Nonlinear Heat Equations* // *Physica.* 1994. D 70. 250-288.
13. Clarkson P.A., Mansfield E.L. *Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions* // *SIAM J. Appl. Math.* 1994. 54. 1693-1719.
14. Clarkson P.A. and Mansfield E.L. *Symmetry reductions and exact solutions of shallow water wave equations* // *Acta Appl. Math.* 1995. 39. 245-276.
15. Clarkson P.A., Winternitz P. *Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation* // *Physica.* 1991. D 49. 257-272.
16. Levi D., Winternitz P. *Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation* // *J. Phys.* 1989. A 22. 2915-2924.
17. Lou S.-Y. *A note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation* // *Phys. Lett.* 1990. 151A. 133-135.
18. Ludlow D.K. *Nonclassical similarity reductions of the Navier-Stokes equations* Ph.D. thesis (Department of Mathematics, University of Exeter, UK), 1994.
19. Mansfield E.L., Reid G.J., Clarkson P.A. *Nonclassical reductions of a coupled nonlinear Schrodinger system* // *Compo Phys. Comm.* 1999. 115. 460-488.
20. Nucci M.C., Clarkson P.A. *The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions: an example of the Fitzhugh-Nagumo equation* // *Phys. Lett.* 1992. 164A. 49-56.
21. Olver P.J. *Direct reduction and differential constraints* // *Proc. R. Soc. Lond.* 1994. A 444. 509-523.
22. Pucci E. *Similarity reductions of partial differential equations* // *J. Phys.* 1992. A 25. 2631-2640.
23. Zidowitz S., *Conditional symmetries and the direct reduction of partial differential equations, Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics, eds. N.H. Ibragimov, M. Torrisi, and A. Valenti. Kluwer, Dordrecht. 1993. P. 387-393.*

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук, Е.Н. Защук

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), i = \overline{1, p} \quad (1)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ - некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$, а $L^i(t), i = \overline{1, q}$ - функции ограниченной вариации на отрезке T . Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t), j = \overline{1, q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a), j = \overline{1, q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1, p} \quad (2)$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0, h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s) \rho_n(s) ds$,

где $\rho_n(t) = n\rho(nt), \rho \geq 0, \text{supp} \rho \subseteq [0, 1], \int_0^1 \rho(s) ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n, \tilde{\rho}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^{p+1} \tilde{\rho}(nx_0, nx_1, \dots, nx_p), \tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1}), \tilde{\rho} \geq 0, \int_{[0,1]^{p+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_p) dx_0 dx_1 \dots dx_p = 1, \text{supp} \tilde{\rho} \subset [0, 1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), i = \overline{1, p} \quad (3)$$

где $L^{jc}(t)$ - непрерывная, а $L^{jd}(t)$ - разрывная составляющая функции $L^j(t), \mu_r^j, r = 1, 2, \dots$ - точки разрыва функции $L^j(t), \Delta L(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r+) - L^{jd}(\mu_r-)$ - величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q},$$

$\mu \in T, x \in R^p, u \in R^q$.

Теорема. Пусть $f^{ij}, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t), j = \overline{1, q}$ - непрерывные справа функции ограниченной вариации.

Тогда при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ так, что $nh_n \rightarrow 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в пространстве $L^p(T)$, если $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \rightarrow 0$ в пространстве $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спасков С. А. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізика, матэматыка, інфарматыка, біялогія. геаграфія. 2019. № 4. С. 16–22.

ВРЕМЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ НА ГРУППАХ КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

А.О. Задорожнюк

Пусть S – не более чем счетное множество. Определим на нем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\Omega = S$, \mathcal{F} – σ -алгебра всех подмножеств Ω , \mathbb{P} – вероятностная мера на \mathcal{F} .

Определение 1. Случайным блужданием (X_t) , $t = 0, 1, 2, \dots$, на множестве S будем называть случайный процесс $X : \Omega \times \mathbb{N}_0 \rightarrow S$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $X_t(\omega) = \omega$.

Определение 2. Пусть μ и ν – вероятностные меры на конечном множестве S . Расстояние по вариации между этими мерами определяется по формуле

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\mu(i) - \nu(i)|.$$

Обозначим через π равномерное распределение на множестве S , через P^{X_t} – распределение вероятностей состояний случайного блуждания (X_t) на этом множестве в момент времени t .

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторая фиксированная величина. Временем перемешивания случайного блуждания (X_t) на S будем называть величину

$$\tau_{\text{mix}}(\varepsilon, (X_t), S) = \inf \{t : d(P^{X_t}, \pi) \leq \varepsilon\}.$$

Время перемешивания, таким образом, характеризует, как быстро распределение вероятностей состояний случайного блуждания приближается к равномерному. Для S_n с порождающим множеством, состоящим из транспозиций соседних элементов, Альдусом [1] были доказаны оценки $C_1 n^3 \leq \tau_{\text{mix}, (X_t), S_n} \leq C_2 n^3 \log n$. Мы же рассматриваем естественное обобщение симметрической группы – группу комплексных отражений $G(m, 1, n)$.

$G(m, 1, n)$, $m > 1$, – конечная неприводимая группа отражений, действующая на n -мерном комплексном векторном пространстве. Ее элементы можно представить как мономиальные матрицы $n \times n$, элементами которых являются ξ^{a_k} ($\xi \in \mathbb{C}$ – первообразный корень из 1 степени m , $k = 1, \dots, n$). Операция на группе – умножение матриц соответствующих элементов. При $m = 1$ группа совпадает с симметрической.

Матрицу, у которой элементы ξ^{a_k} стоят на позициях $(k, \sigma(k))$ ($\sigma \in S_n$), будем обозначать парой $(\sigma, (a_1, a_2, \dots, a_n))$. Также пусть (i, j) обозначает транспозицию из симметрической группы, меняющую i -ый и j -ый элементы местами, а id – единичный элемент симметрической группы. Выберем порождающее множество $T_{m, 1, n}$ ($m > 1$), состоящее из следующих элементов:

- $s_i = ((i, i + 1), (0, \dots, 0))$, $i = \overline{1, n - 1}$;
- $r = (\text{id}, (1, 0, \dots, 0))$;
- $r^{-1} = (\text{id}, (m - 1, 0, \dots, 0))$.

Рассматриваемое случайное блуждание начинается с конкретного (без потери общности, произвольного) элемента. Его начальное распределение вероятностей можно задать вектором длины $|G(m, 1, n)| = m^n n!$, где на одной позиции стоит единица, а на остальных – нули. Матрица вероятностей одношаговых переходов определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}_{kl} = \mathbb{P}(X_{t+1} = \omega_l | X_t = \omega_k) = \begin{cases} p_s/2, & \text{если } \omega_l = s_i \omega_k, \quad i = \overline{1, n - 1} \\ p_r/2, & \text{если } \omega_l = r \omega_k \text{ или } \omega_l = r^{-1} \omega_k \\ 1/2, & \text{если } \omega_l = \omega_k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1)$$

где $(n - 1)p_s + 2p_r = 1$. Легко убедиться, что, т.к. элементы s_i имеют порядок 2, матрица будет симметрической, и, следовательно, дважды стохастической. Тогда для вектора $v_\pi = \frac{1}{m^n n!}(1, 1, \dots, 1)$ длины $m^n n!$ верно $v_\pi = v_\pi \mathcal{M}$, т.е. стационарное распределение такого случайного блуждания является равномерным.

Верны следующие оценки на время перемешивания.

Теорема 1. *Для любого t выполняется неравенство*

$$\tau_{\text{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m, 1, n)) \geq \frac{n^2}{4p_s} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right).$$

Теорема 2. *Для любого t при $n \geq 4/\varepsilon$ справедлива оценка:*

$$\tau_{\text{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m, 1, n)) \leq \lceil 2 \log_2 n \rceil \left(\left\lceil \frac{m(m+4)}{4p_r} \right\rceil \left\lceil \frac{4(n-1)}{p_s} \right\rceil \lceil 2 \log_2 n \rceil + \left\lceil \frac{2n(n-1)}{p_s} \right\rceil + \left\lceil \frac{n(n-1)}{p_s} \right\rceil \right)$$

Следствие. *Пусть $p_r = \frac{1}{4}$, $p_s = \frac{1}{2(n-1)}$. Для любого $t \in \mathbb{N}$ существуют постоянные $c(\varepsilon)$, $C(m)$ такие, что для любого $n \geq 4/\varepsilon$ выполняются неравенства*

$$c(\varepsilon)n^3 \leq \tau_{\text{mix}}(\varepsilon, (X_t), G(m, 1, n)) \leq C(m)n^3 \log n.$$

Литература

1. Aldous D.J. *Random Walks on Finite Groups and Rapidly Mixing Markov Chains* // Séminaire de Probabilités XVII. 1983. P.243-297.

К ВОПРОСУ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ И ЕГО ПОГРЕШНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Игнатенко

Пусть $C^1(D)$ — пространство функций, имеющих на $D = [a, b]$ непрерывную производную первого порядка, и $F(x)$ — оператор, отображающий $C^1(D)$ в некоторое другое функциональное пространство:

$$F(x) \equiv F(t; x), \quad x = x(s) \in C^1(D), \quad t \in R^N.$$

Операторный многочлен первой степени $\mathcal{P}_1(x)$ в рассматриваемом пространстве имеет вид

$$\mathcal{P}_1(x) = c(t) + c_1(t)x(a) + \int_D q(t, s)x^{(1)}(s)ds, \quad (1)$$

где $c(t)$, $c_1(t)$ и $q(t, s)$ — заданные функции. Многочлены (1) являются характерными линейными операторами в пространстве $C^1(D)$. Многочлены высших порядков строятся путем добавления к $\mathcal{P}_1(x)$ соответствующих однородных относительно $x(a)$ и $x^{(1)}(s)$ ($s \in D$) форм второй, третьей и т.д. степеней. В частности, операторный многочлен второй степени $\mathcal{P}_2(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(x) = & \mathcal{P}_1(x) + c_2(t)x^2(a) + \\ & + x(a) \int_D q_1(t, s)x'(s)ds + \int_D \int_D q_2(t, s_1, s_2)x'(s_1)x'(s_2)ds_1ds_2, \end{aligned}$$

где $c_2(t)$, $q_1(t, s)$ и $q_2(t, s)$ — заданные функции.

Заметим, что задача интерполирования операторов в ее классической постановке решается неоднозначно. Формулы операторного интерполирования могут быть построены на основе аппарата разделенных разностей. Определения и свойства разделенных разностей произвольных порядков для операторов изложены, например, в [1].

Исследуем формулы разделенных разностей высших порядков в пространстве функций с непрерывной первой производной, рассмотренные ранее в работе [2]. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_k(s, x_0, x_1) & \equiv \sigma_k(x_0, x_1), \\ \sigma_k(x_0, x_1) & = \sigma_{k-1}(x_0, x_1) + \frac{(s-a)^k}{k!} [x_1^{(k)}(a) - x_0^{(k)}(a)] \quad (k = 0, 1, \dots, p-1), \\ \sigma_{-1}(x_0, x_1) & = x_0(s), \tilde{h}_1(s) = h_1(s) - \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{(s-a)^\nu}{\nu!} h_1^{(\nu)}(a); \quad x_0, x_1, h_1 \in C^1(D). \end{aligned}$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} \omega_{nk}(x) & = (x - x_k(a))(x - x_{k+1}(a)) \dots (x - x_n(a)), \quad k = 1, 2, \dots, n; \\ \sigma_{ki}(s) & = x_i(s) + x_k(a) - x_i(a); \quad k, i = 0, 1, \dots, n; \\ \phi_{kj}(s, \tau_1, \dots, \tau_j) & = \phi_{k,j-1}(s, \tau_1, \dots, \tau_{j-1}) + \frac{x_j(s) - \sigma_{j,j-1}(s)}{(b-a)^j} \prod_{l=1}^j (\tau_l - a), \end{aligned}$$

$$k, j = 0, 1, \dots, n; \phi_{k0}(s) = \sigma_{k0}(s), \tilde{h}_i(s) = h_i(s) - h_i(a), i = 1, 2, \dots, n.$$

Формула

$$\begin{aligned} & F[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]h_n h_{n-1} \dots h_1 = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{F[\sigma_{k0}(\cdot)]}{\omega'_{n0}(x_k(a))} h_n(a) h_{n-1}(a) \dots h_1(a) + \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=\nu}^n (b-a)^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2}} \frac{h_n(a) \dots h_{\nu+1}(a)}{\omega'_{n\nu}(x_k(a))} \times \\ & \quad \times \int_{D^\nu} \prod_{i=1}^{\nu-1} (\tau_i - a)^{\nu-i} \delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, \dots, \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), \dots, \tilde{h}_1(\cdot)] d\tau_1 \dots d\tau_\nu \end{aligned} \quad (2)$$

определяет [2] разделенную разность порядка $n \geq 1$ относительно узлов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ для оператора $F(x)$ на $C^1(D)$.

Интерполяционная формула Ньютона

$$L_n(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^n F[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_{k-1}) \dots (x - x_1)(x - x_0),$$

когда операторы разделенных разностей $F[x_0, x_1, \dots, x_k] h_k \dots h_2 h_1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) определяются формулой (2), принимает вид

$$L_n(x) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu}^n \frac{\omega_{n\nu}[x(a)]}{\omega'_{n\nu}[x_k(a)](x(a) - x_k(a))} I_{k\nu}(F; x), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} & I_{k0}(F; x) = F[\sigma_{k0}(\cdot)], \\ & I_{k\nu}(F; x) = (b-a)^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2}} \int_{D^\nu} \prod_{j=1}^{\nu-1} (\tau_j - a)^{\nu-j} \delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, \dots, \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), \dots, \tilde{h}_1(\cdot)] d\tau_1 \dots d\tau_\nu, \end{aligned}$$

$$\tilde{h}_\nu(s) = x(s) - x_{\nu-1}(s) - x(a) + x_{\nu-1}(a) \quad (k = 0, 1, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ тождественно совпадает [2] с оператором $F(x)$, если $F(x)$ — произвольный в пространстве $C^1(D)$ операторный многочлен степени не выше n .

Получим формулу для представления погрешности интерполирования $r_n(x)$ многочленом $L_n(x)$ вида (3). Имеем

$$\begin{aligned} & r_n(x) = F(x) - L_n(x) = F[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_0) = \\ & = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F[\sigma_{k0}(\cdot)]}{\omega'_{n0}(x_k(a))} h_{n+1}(a) h_n(a) \dots h_1(a) + \sum_{\nu=1}^{n+1} \sum_{k=\nu}^{n+1} (b-a)^{\frac{-\nu(\nu+1)}{2}} \frac{h_{n+1}(a) \dots h_{\nu+1}(a)}{\omega'_{n+1,\nu}(x_k(a))} \times \\ & \quad \times \int_{D^\nu} \prod_{i=1}^{\nu-1} (\tau_i - a)^{\nu-i} \delta^\nu F[\phi_{k\nu}(\cdot, \tau_1, \dots, \tau_\nu); \tilde{h}_\nu(\cdot), \dots, \tilde{h}_1(\cdot)] d\tau_1 \dots d\tau_\nu, \end{aligned}$$

где $h_i(s) = x(s) - x_{i-1}(s)$, $\tilde{h}_i(s) = h_i(s) - h_i(a)$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$), $x_{n+1} \equiv x$.

В заключение отметим, что достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [3].

Литература

1. Янович Л. А. *Приближенное вычисление непрерывных интегралов по гауссовым мерам*. Минск: Наука и техника, 1976.
2. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Формулы операторного интерполирования в пространствах непрерывно дифференцируемых функций* // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. 1999. Т. 3. С. 89–98.
3. Янович Л. А., Игнатенко М. В. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц*. Минск: Беларус. навука, 2020.

**ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С
ПАРАМЕТРАМИ****Е.И. Каландия**

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\mu \int_a^t K(t, s, x(s)) ds + x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

где μ – вещественный параметр, $K(t, s, z)$ – функция трех переменных, называемая ядром интегро-дифференциального уравнения, и $f(t, z)$ – двух переменных, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $K(t, s, z)$ определена и непрерывна на множестве $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ ($b > a$, \mathbb{R} – множество вещественных чисел) и удовлетворяющая условию Липшица по третьему аргументу, т.е. существует такое число $C_1 > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|K(t, s, z_2) - K(t, s, z_1)| \leq C_1 |z_2 - z_1|. \quad (2)$$

2) $f(t, z)$ определена и непрерывна на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица по второму аргументу, т.е. существует такое число $C_2 > 0$, что для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|f(t, z_2) - f(t, z_1)| \leq C_2 |z_2 - z_1|. \quad (3)$$

Для уравнения (1) поставим задачу Коши, задав начальное условие

$$x(a) = x^0. \quad (4)$$

Доказано [1], что при выполнении условий 1) и 2) имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого нелинейного интегро-дифференциального уравнения, а также следствие из нее в линейном случае, когда ядро $K(t, s, x(s))$ может быть представлено в виде произведения $L(t, s)x(s)$, где функция $L(t, s)$ определена и непрерывна на квадрате $[a, b] \times [a, b]$, и $f(t, x(t)) = \alpha(t)x(t) + g(t)$, где функция $\alpha(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \int_a^t K_1(t, s, x(s), y(s)) ds + x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \\ \int_a^t K_2(t, s, x(s), y(s)) ds + y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), \end{cases}$$

где ядра $K_1(t, s, z_1, z_2)$, $K_2(t, s, z_1, z_2)$ и функции $f_1(t, z_1, z_2)$, $f_2(t, z_1, z_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

3) $K_1(t, s, u, v)$ и $K_2(t, s, u, v)$ непрерывны на множестве $[a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$ ($b > a$, \mathbb{R} – множество вещественных чисел) и удовлетворяют условию Липшица по третьему и четвертому аргументу, т.е. существует такое число $C_1 > 0$, что для всех $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|K_1(t, s, u_2, v_2) - K_1(t, s, u_1, v_1)| \leq C_1 (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|).$$

$$|K_2(t, s, u_2, v_2) - K_2(t, s, u_1, v_1)| \leq C_1 (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|).$$

4) $f_1(t, u, v)$ и $f_2(t, u, v)$ непрерывны на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию Липшица по второму и третьему аргументу, т.е. существует такое число $C_2 > 0$, что для всех $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|f_1(t, u_2, v_2) - f_1(t, u_1, v_1)| \leq C_2 (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|).$$

$$|f_2(t, u_2, v_2) - f_2(t, u_1, v_1)| \leq C_2 (|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|).$$

Для системы поставим задачу Коши, задав начальное условие

$$x(a) = x^0, \quad y(a) = y^0.$$

В линейном случае, когда ядра $K_1(t, s, x(s)y(s)) = L_1(t, s)x(s)$, $K_2(t, s, x(s)y(s)) = L_2(t, s)y(s)$, где функции $L_1(t, s)$, $L_2(t, s)$ определены и непрерывны на квадрате $[a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$, и $f_1(t, x(t)) = \alpha_{11}(t)x(t) + \beta_{12}y(t) + g_1(t)$, $f_2(t, x(t)) = \alpha_{21}(t)x(t) + \beta_{22}y(t) + g_2(t)$, где функции $\alpha_{11}(t)$, $\alpha_{21}(t)$, $\beta_{21}(t)$, $\beta_{22}(t)$ и $g_1(t)$, $g_2(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметрами

$$\begin{cases} \mu_1 \int_a^t L_1(t, s)x(s)ds + x'(t) = \alpha_{11}(t)x(t) + \beta_{12}y(t) + g_1(t), \\ \mu_2 \int_a^t L_2(t, s)y(s)ds + y'(t) = \alpha_{21}(t)x(t) + \beta_{22}y(t) + g_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

Так как условия 3) и 4) для уравнения (5), очевидно, выполнены, то мы получаем следующую теорему существования и единственности:

Теорема. *Решение задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений (5), в которой функции $L_1(t, s)$, $L_2(t, s)$ непрерывны на квадрате $[a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$, и функции $\alpha_{11}(t)$, $\alpha_{21}(t)$, $\beta_{21}(t)$, $\beta_{22}(t)$ и $g_1(t)$, $g_2(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, существует и единственно.*

Литература

1. Вувуникян Ю. М., Каландия Е. И. *Теоремы существования и единственности для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметром* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 13. № 1. С. 1–16.

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И СТАТИСТИЧЕСКОГО
РАВНОВЕСИЯ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ**

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, А.А. Бусалов

Математические основы и вопросы численного решения линейных задач теории переноса излучения обсуждались в [1–4]. Учет взаимодействия излучения со средой в отсутствие локального термодинамического равновесия приводит к необходимости изучения нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений [4–8]. Основные аспекты этих нелинейных задач могут быть описаны системой интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия [6, 7]. Вопросы математической корректности и свойств решений этой системы в ограниченных областях были изучены в работах [9–12]. В работах [13, 14] рассматривалась краевая задача для нелинейной стационарной системы интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое.

В настоящей работе исследуется следующая система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений теории переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое $x_1 \leq x \leq x_2$, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(x, \nu, \mu, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi(x, \nu, \mu, t)}{\partial x} + h\nu_{12} \frac{\kappa(\nu)}{2} (B_{12}C_1(x, t) - B_{21}C_2(x, t)) \varphi(x, \nu, \mu, t) = h\nu_{12} \frac{\kappa(\nu)}{2} A_{21}C_2(x, t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(C_{12}n_e(x) + B_{12} \int_I \int_{-1}^1 \frac{\kappa(\nu)}{2} \varphi(x, \nu, \mu, t) d\nu d\mu \right) C_1(x, t) = \\ & = C_2(x, t) \left(A_{21} + C_{21}n_e(x) + B_{21} \int_I \int_{-1}^1 \frac{\kappa(\nu)}{2} \varphi(x, \nu, \mu, t) d\nu d\mu \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$C_1(x, t) + C_2(x, t) = f(x). \quad (3)$$

Здесь $x \in (x_1, x_2)$, $x_2 - x_1 = d > 0$, $\mu \in [-1, 1]$, $\nu \in I = [0, \nu_0]$, $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Функция φ – удельная интенсивность излучения, C_1 и C_2 – пространственные плотности атомов среды, находящихся в основном и в возбужденном состоянии соответственно.

Система (1)–(3) дополняется граничными условиями

$$\varphi(x_1, \nu, \mu, t) = 0, \mu > 0, \varphi(x_2, \nu, \mu, t) = 0, \mu < 0, \nu \in I, t \in [0, T], \quad (4)$$

соответствующими отсутствию внешнего потока частиц, падающего на границу области, и начальным условием

$$\varphi(x, \nu, \mu, 0) = \varphi_0(x, \nu, \mu). \quad (5)$$

Предполагается, что $h, c, \nu_{12}, \nu_0, B_{12}, B_{21}, C_{12}, C_{21}, A_{21}$ – заданные положительные числа, удовлетворяющие условию $B_{12}C_{21} - B_{21}C_{12} > 0$; $n_e(x), f(x), x \in [x_1, x_2], \kappa(\nu), \nu \in I$ – заданные функции, измеримые и неотрицательные почти всюду в своих областях определения, удовлетворяющие условиям

$$\text{esssup}_{x \in (x_1, x_2)} n_e(x) < \infty, \text{esssup}_{x \in (x_1, x_2)} f(x) < \infty, \text{esssup}_{\nu \in I} \kappa(\nu) < \infty, \int_I \kappa(\nu) d\nu = 1.$$

Определим характеристику $\{l_\mu\}$ дифференциального оператора $\partial/c\partial t + \mu\partial/\partial x$ системой уравнений

$$c dt = \frac{dx}{\mu} = \frac{d\mu}{0} = \frac{d\nu}{0}$$

и обозначим через $1/c(d/d\tau)_\mu$ оператор дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\mu\}$:

$$\frac{1}{c} \left(\frac{d}{d\tau} \right)_\mu \psi(x, \nu, \mu, t) = \frac{1}{c} \frac{d\psi(x + c\mu(\tau - t), \nu, \mu, \tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t}.$$

Пусть $D = [x_1, x_2] \times I \times [-1, 1]$. Для произвольного измеримого подмножества Π евклидова пространства обозначим через $K_\infty(\Pi)$ конус неотрицательных функций в $L_\infty(\Pi)$; $\mathcal{D}_\infty(D \times [0, T])$ – класс функций $\psi \in L_\infty(D \times [0, T])$, абсолютно непрерывных вдоль почти каждой характеристики $\{l_\mu\}$ в $D \times [0, T]$, удовлетворяющих граничным условиям (4), и таких, что $1/c(d/d\tau)_\mu \psi \in L_\infty(D \times [0, T])$, $\mathfrak{M}_T = \mathcal{D}_\infty(D \times [0, T]) \times L_\infty([x_1, x_2] \times [0, T]) \times L_\infty([x_1, x_2] \times [0, T])$.

Предполагается, что начальная функция $\varphi_0(x, \nu, \mu)$ принадлежит классу $K_\infty(D)$.

Решением задачи (1)–(5) называется функция $\Phi = \{\varphi, C_1, C_2\} \in \mathfrak{M}_T$, удовлетворяющая системе (1)–(3) и начальным и краевым условиям (4), (5) почти всюду, дифференциальный оператор $\partial/c\partial t + \mu\partial/\partial x$ в (1) понимается как оператор $1/c(d/d\tau)_\mu$ дифференцирования вдоль характеристики $\{l_\mu\}$.

В работе доказывается существование и единственность неотрицательного решения поставленной задачи. Исследуются свойства решения, предлагается и обосновывается итерационный линеаризующий алгоритм его поиска. Обсуждаются вопросы численной реализации предложенного алгоритма.

Литература

1. Владимиров В. С. *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц* // Труды МИАН СССР. 1961. Вып. 61. С. 2–158.
2. Гермогенова Т. А. *Локальные свойства решений уравнения переноса*. М.: Наука, 1966.
3. Марчук Г. И., Лебедев В. И. *Численные методы в теории переноса нейтронов*. М.: Атомиздат, 1981.
4. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. *Методы дискретных ординат в задачах переноса излучения*. М: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1986.
5. Гольдин В. Я. *Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения* // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1964. № 4. С. 1078–1087.
6. Иванов В. В. *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*. М.: Гостехтеоритздат, 1956.
7. Михалас Д. *Звездные атмосферы*. М.: Мир, 1982.
8. Четверушкин Б. Н. *Математическое моделирование задач динамики излучающего газа*. М., Наука, 1985.

9. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 1990. Т. 30. С. 1071–1080.
10. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *О разрешимости "в целом" нелинейной задачи переноса излучения* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 482–494.
11. Калинин А. В., Морозов С. Ф. *Смешанная задача для нестационарной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений* // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 5. С. 1052–1066.
12. Калинин А. В., Тюхтина А. А. *О нелинейной задаче для системы интегродифференциальных уравнений теории переноса излучения* // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 95–106.
13. Калинин А. В., Козлов А. Ю. *Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения в плоско-параллельном слое* // Вестник ННГУ. 2011. Т. 4. № 1. С. 140–145.
14. Kalinin A. V., Tyukhtina A. A., Busalov A. A. *An iterative method for solving a nonlinear system of the theory of radiation transfer and statistical equilibrium in a plane-parallel layer* // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies 22nd International Conference, MMST 2022, Nizhny Novgorod, Russia, November 14-17, 2022, Revised Selected Papers. Springer, CCIS 1750, 2022. P. 106–120.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина, В.Е. Метелева

Различные представления функций используются в теории вложения пространств дифференцируемых функций, основы которой были заложены в работах С.Л. Соболева [1, 2]. Существенное развитие эта теория получила в работах С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова [3], Ю.Г. Решетняка [4, 5], В.И. Буренкова [6]. В частности, в работах [4, 5] рассматриваются интегральные представления для функций и вектор-функций через некоторые дифференциальные операторы, на основе которых доказываются оценки, известные в литературе под названием неравенств Корна [7].

При исследовании задач гидродинамики и электромагнитной теории важную роль играют оценки векторных полей \vec{u} , связывающие их L_p -нормы с L_p -нормами $\operatorname{div} \vec{u}$ и $\operatorname{rot} \vec{u}$ [8–10]. При изучении электромагнитных полей в неоднородных средах с разрывными коэффициентами, характеризующими свойства среды, непосредственное использование этих результатов невозможно, и для решения этих вопросов в работах [11, 12] на основании специальных представлений векторных функций в звёздных областях были получены соответствующие оценки для скалярных произведений векторных полей. С использованием этих оценок были исследованы вопросы корректности различных постановок краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах.

В настоящей работе рассматриваются представления векторных полей во внешних областях [13], которые позволяют расширить применимость оценок скалярных произведений векторных полей для задач электромагнитной теории в областях с более сложной геометрией.

Рассматриваемые представления имеют следующий вид. Пусть $\Omega_{int} \subset R^3$ – открытое множество, звездное относительно начала координат $\vec{0} \in \Omega_{int}$ с границей Γ класса C^1 , $\Omega_{ext} = R^3 \setminus \Omega_{int}$. Пусть $S = \{\vec{s} \in R^3 : |\vec{s}| = 1\}$, $l_s = \{\vec{x} = r\vec{s}, r \in (0, +\infty)\}$ – луч, проходящий через точку $\vec{s} \in S$. Через S_Γ обозначается множество $S_\Gamma = \{\vec{s} \in S : l_s \cap \Gamma \neq \emptyset\}$.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

- 1) Множество S_Γ открыто в S ;

2) для каждого $\vec{s} \in S_\Gamma$ множество $l_s \cap \Gamma$ состоит ровно из одной точки $\vec{x} = R(\vec{s})\vec{s}$, при этом $r\vec{s} \in \Omega_{int}$, если $0 < r < R(\vec{s})$ и $r\vec{s} \in \Omega_{ext}$, если $r > R(\vec{s})$;

3) функция $h(\vec{x}) = R(\vec{x}/|\vec{x}|)$, определенная на множестве $O_\Gamma = \{r\vec{s} : (r, \vec{s}) \in (0, \infty) \times S_\Gamma\}$, является функцией класса $C^1(O_\Gamma)$.

Для каждой точки $\vec{x} \in \Gamma$ обозначим через $\vec{n}(\vec{x})$ единичный вектор внешней по отношению к Ω_{int} нормали; для вектор-функции $\vec{u} \in \{C^1(\bar{\Omega}_{ext})\}^3$ использованы обозначения:

$$u_n(\vec{x}) = (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})), \quad \vec{u}_\tau(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - u_n(\vec{x})\vec{n}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma.$$

Теорема Пусть граница Γ множества $\Omega_{int} \subset R^3$ удовлетворяет сформулированным выше условиям 1)-3). Тогда для любой функции $\vec{u} \in \{C^1(\bar{\Omega}_{ext})\}^3$ при всех $\vec{x} \in \Omega_{ext}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}) = & \operatorname{rot} \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^1 \tau [\tilde{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}] d\tau + \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^1 \tau^2 \tilde{x} \operatorname{div} \tilde{u}(\tau\vec{x}) d\tau + \\ & + \vec{x} \left(\operatorname{grad} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot \tilde{n} \left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) \right) u_n \left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}, \end{aligned}$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{grad} \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^1 (\tilde{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x}) d\tau + \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^1 \tau [\operatorname{rot} \tilde{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}] d\tau + \left[\vec{x} \times \left[\operatorname{grad} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \times \tilde{u}_\tau \left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) \right] \right].$$

В работе обсуждаются вопросы применения данных представлений для получения оценок векторных полей в ограниченных и неограниченных областях и использование этих оценок для стационарных и квазистационарных задач электромагнитной теории в неоднородных средах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, <https://rscf.ru/project/23-21-00440/>

Литература

1. Соболев С. Л. *Об одной теореме функционального анализа* // Мат. сб. 1938. Т. 4. № 3. С. 471–497.
2. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. М.: Наука, 1975.
4. Решетняк Ю. Г. *Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций* // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 2. С. 420–432.
5. Решетняк Ю. Г. *Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей* // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.
6. Буренков В. И. *Интегральные представления С. Л. Соболева и формула Тейлора* // Труды МИАН СССР. 1973. Т. 131. С. 210–225.
7. Решетняк Ю. Г. *Об интегральных представлениях дифференцируемых функций* // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980. С. 173–187.
8. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. *Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторов векторного анализа* // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.
9. Вейль Г. *Метод ортогональной проекции в теории потенциала* // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
10. Girault V., Raviart P. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. N.Y.: Springer-Verlag, 1986.

11. Калинин А. В., Калинкина А. А. Лр-оценки векторных полей // Изв. вузов. Сер. Математика. 2004. № 3. С. 26–35.

12. Kalinin A. V., Tyukhtina A. A. *Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems*// Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. V. 41. № 18. P. 9283–9292.

13. Калинин А. В., Молодкина В. Е. *Некоторые представления векторных полей во внешних областях*// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 3-1. С. 94–98.

ОДНО СООТНОШЕНИЕ КВАЗИНОРМ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Р. Мисюк

Пусть T , D_+ и D_- соответственно окружность $|z| = 1$, круг $|z| < 1$ и область $|z| > 1$ в комплексной плоскости. Для $0 < p \leq \infty$ через $L_p(D_+)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций на D_+ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D_+)}$. Через \mathcal{R}_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, обозначим множество рациональных функций степени не выше n с полюсами лишь в D_- . Известно, что для $r_n \in \mathcal{R}_n \cap L_\infty(D_+)$ имеет место оценка

$$\|r'_n\|_{L_2(D_+)} \leq \sqrt{\pi n} \|r_n\|_{L_\infty(D_+)},$$

полученная Е.П. Долженко из геометрических соображений. В настоящее время в теории рациональной аппроксимации известны различные его виды. Так, в частности, были получены его обобщения для пространств Лебега $L_p(D_+)$ относительно плоской меры, на высшие производные и на производные дробного порядка, приведены соответствующие обратные теоремы [3],[4].

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ через B_q^α обозначим пространство Харди–Бесова(см., например, [1],[2]). Именно, $f \in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta > \alpha$ функция $(1 - |z|^2)^{\beta - \alpha - \frac{1}{q}} \cdot (J^\beta f)(z)$ принадлежит $L_q(D_+)$, где $J^\beta f$ – производная функции f в смысле Вейля. Квазинорма (норма при $1 \leq q \leq \infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_q^\alpha} &= \left\| (1 - |z|^2)^{\beta - \alpha - \frac{1}{q}} \cdot (J^\beta f)(z) \right\|_{L_q(D_+)} = \\ &= \left(\int_{D_+} \left| (1 - |z|^2)^{\beta - \alpha - \frac{1}{q}} \cdot (J^\beta f)(z) \right|^q dm_2(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что определение пространства B_q^α не зависит от β : при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, принимают $\beta = \alpha + 1$.

Теорема 1.[3] Пусть $r \in \mathcal{R}_n$, $\alpha > 0$, $p > 2$ и $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда

$$\|r\|_{B_q^\alpha} \leq c(\alpha, p) n^{\alpha + 1/p} \|r\|_{L_p(D_+)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Полагаем далее, что рациональная функция r степени $n + m$ не имеет полюсов на T , причем n полюсов лежат в D_+ и m – в D_- . Тогда $r(z) = r_+(z) + r_-(1/z)$, где r_+

и r_- — рациональные функции степени соответственно n и m с полюсами лишь в D_- . Из теоремы 1 немедленно получаем.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $p > 2$ и $1/q = \alpha + 2/p$. Тогда

$$\|r_+\|_{B_q^\alpha} \leq c(\alpha, p)n^{\alpha+1/p}\|r\|_{L_p(D_+)},$$

$$\|r_-\|_{B_q^\alpha} \leq c(\alpha, p)m^{\alpha+1/p}\|r\|_{L_p(D_+)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от α и p .

Применяя стандартный метод Бернштейна, легко получить соответствующее приложение в виде обратных теорем, где техническим аппаратом для их решения служит приведенное здесь соотношения для производных рациональных функций.

Литература

1. Flett T. M., Flett T. M. *Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk* // J. Math. Anal. and Appl., 1972. V. 39, № 1. P. 121–158.
2. Пекарский А. А. *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации* // Матем. сб., 1984. Т. 124 (166), № 4 (8). С. 571–588.
3. Мисюк В. Р. *Уточнение неравенств и теорем типа Бернштейна теории рациональных приближений относительно плоской меры Лебега* // Веснік ГрДУ імя Я.Купалы. Серія 2, 2008. № 2 (68). С. 22–31.
4. Мисюк В. Р. *Об обратной теореме теории рациональных приближений для пространств Бергмана* // Проблемы физики, математики и техники. 2010. №.1(2). С. 34–37.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

О.Д. Нуржанов

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^t B(t, s)x(s)ds + f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))ds\right) \quad (1)$$

при нелинейных граничных условиях

$$g(x(0)) = x(T), \quad (2)$$

где x , f , φ , g — точки n -мерного евклидова пространства E_n ; $A(t)$, $B(t, s)$ — матрицы с размерами $n \times n$.

Пусть $D \subset E_n$ — замкнутая ограниченная область, $D_1 : \|y\| \leq T \cdot h_\varphi$ — шар пространства E_n , $h_\varphi = \max_{(t,s) \in [0,T], x \in D} \|\varphi(t, s, x)\|$.

Предположим, что в области $(t, s, x, y) \in \Omega = [0, T] \times [0, T] \times D \times D_1$ выполняются следующие условия:

1) матрицы $A(t)$ и $B(t, s)$ определены и непрерывны в области $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ и для них существует резольвентная матрица $R(t, s)$ ($R(t, t) = E$), которая является решением сопряженного уравнения

$$\frac{\partial R(t, s)}{\partial s} = -R(t, s)A(s) - \int_s^t R(t, u)B(u, s)du;$$

2) вектор-функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, x)$, $g(u)$ определены и непрерывны в области Ω , а также для всех (t, x, y) , (t, x', y') , (t, s, x) , $(t, s, x') \in \Omega$ выполняются неравенства

$$|f(t, x, y)| \leq M,$$

$$|f(t, x, y) - f(t, x', y')| \leq K_1 |x - x'| + K_2 |y - y'|,$$

$$|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x')| \leq K_3 |x - x'|,$$

где $|f| = (|f_1|, \dots, |f_n|)$, $M = (M_1, \dots, M_n)$, $M_i > 0$; $K_l = \{k_{ij}^l \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, 3\}$;

3) множества точек $x_0 \in D_\beta \subset D$ таких, что точки

$$x_0(t, x_0) = R(t, 0) \left(1 - \frac{t}{T}\right) x_0 + \frac{t}{T} g(x_0)$$

содержатся в области D вместе со своей β -окрестностью, непусто: $D_\beta \neq \emptyset$, где

$$\beta = \left(\frac{T}{2} R_0 + R_1\right) M, \quad R_0 = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |R(t, \tau)|,$$

$$R_1 = \max_{t \in [0, T]} \int_0^t |R(T, \tau) - R(t, \tau)| d\tau;$$

4) наибольшее положительное собственное значение матрицы

$$Q = \left(\frac{T}{2} R_0 + R_1\right) (K_1 + T K_2 K_3)$$

меньше единицы: $\lambda_{\max}(Q) < 1$.

При этих условиях для исследования решений краевой задачи (1), (2) можно применить схему численно-аналитического метода А.М. Самойленко [1, 2]. Согласно этой схеме для построения приближенного решения исходной задачи (1), (2) используется рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} x_m(t, x_0) &= R(t, 0)x_0 + \int_0^t R(t, \tau) f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) d\tau - \\ &- \frac{t}{T} \int_0^T R(T, \tau) f \left(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_{m-1}(s, x_0)) ds \right) d\tau + \\ &+ \frac{t}{T} [g(x_0) + R(T, 0)x_0], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ x_0(t, x_0) &= R(t, 0)x_0 + \frac{t}{T} [g(x_0) + R(T, 0)x_0]. \end{aligned} \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть для краевой задачи (1), (2) выполняются условия 1) – 4). Тогда

1) при всех $x_0 \in D_\beta$ последовательность функций вида (3), удовлетворяющих краевым условиям (2), равномерно сходится при $m \rightarrow \infty$ относительно области $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t, x_0)$, которая удовлетворяет краевым условиям (2);

2) предельная функция $x^*(t, x_0)$ является решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда, если точка $x_0 = x_0^*$ является решением определяющего уравнения:

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} [g(x_0) + R(T, 0)x_0] - \frac{1}{T} \int_0^T R(T, \tau) f \left(\tau, x^*(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, x_0)) ds \right) d\tau = 0.$$

При подстановке этого значения $x = x_0^*$ в (3), получим приближенное решение краевой задачи (1), (2).

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*. Киев: Наукова думка, 1992.

2. Нуржанов О.Д., Исмаилова Н.К. *О решении многоточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. 2021. Т. 55. № 4. С. 11–14.*

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА–ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ – набор, состоящий из k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, \dots, k \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, считаем, что все ряды в (1) сходятся в некоторой окрестности нуля и тем самым равенства (1) определяют систему \mathbf{f} , состоящую из функций аналитических в окрестности нуля.

Множество k -мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$.

Определение 1. Аппроксимациями Эрмита–Паде для пары (n, \vec{m}) и системы функций (1) называются рациональные дроби

$$\pi_{n_j, \vec{m}}^j(z) = \pi_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)} \quad j = 1, \dots, k,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z) = Q_m(z, \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leq m$ и многочлены $P_{n_j}^j(z) = P_{n_j}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, \dots, k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (2)$$

Если $k = 1$, то \mathbf{f} состоит из одной функции $f(z) = f_1(z)$. В этом случае $\pi_{n_1, \vec{m}}^1(z; f_1)$ называют аппроксимацией Паде порядка (n, m) и обозначают $\pi_{n, m}(z; f)$ [1].

Определение 2. Аппроксимациями Эрмита–Якоби для пары (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} , определённых равенствами (1), будем называть (см. [2]) рациональные дроби

$$\widehat{\pi}_{n_j, \vec{m}}^j(z) = \widehat{\pi}_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \frac{\widehat{P}_{n_j}^j(z)}{\widehat{Q}_m(z)},$$

где многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, $\widehat{Q}_m(z) = \widehat{Q}_m(z, \mathbf{f})$, $\deg \widehat{Q}_m \leq m$, $\widehat{P}_{n_j}^j(z) = \widehat{P}_{n_j}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg \widehat{P}_{n_j}^j \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$ при $j = 1, \dots, k$ подбираются таким образом, чтобы

$$f_j(z) - \frac{\widehat{P}_{n_j}^j(z)}{\widehat{Q}_m(z)} = O(z^{n+m+1}). \quad (3)$$

Аппроксимации Эрмита–Паде $\{\pi_{n_j, m}^j(z)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно [3], в то время как аппроксимации Эрмита–Якоби могут не существовать. К. Якоби в [2] при $k = 1$ нашёл достаточное условие (теорема Якоби) их существования. В данном сообщении получено обобщение теоремы Якоби на случай произвольных $k > 1$.

Для единственности существования многочленов $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ необходимо и достаточно (см. [3], [4]), чтобы ранг матрицы $F_{n, \vec{m}}$ порядка $m \times (m + 1)$ был максимальный, т. е. равен m . Матрица $F_{n, \vec{m}}$ определяется равенством

$$F_{n, \vec{m}} = \begin{pmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \cdots & f_{n_1+2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k+1}^k \\ f_{n-m_k+2}^k & f_{n-m_k+3}^k & \cdots & f_{n_k+2}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m}^k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрица $F_{n, \vec{m}}$ состоит из блок-матриц

$$F^j = \begin{pmatrix} f_{n-m_j+1}^j & f_{n-m_j+2}^j & \cdots & f_{n_j+1}^j \\ f_{n-m_j+2}^j & f_{n-m_j+3}^j & \cdots & f_{n_j+2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^j & f_{n+1}^j & \cdots & f_{n+m}^j \end{pmatrix}$$

порядка $m_j \times (m + 1)$, расположенных друг над другом в порядке следования. В случае, если $m_j = 0$ матрица $F_{n, \vec{m}}$ не содержит блок-матрицу F^j . При $k = 1$ либо $\vec{m} = (m_1, 0, 0, \dots, 0)$ матрица $F_{n, \vec{m}}$ состоит из одного блока F^1 . Если в $F_{n, \vec{m}}$ удалить последний столбец, то получим квадратную матрицу порядка m . Определитель этой матрицы обозначим через $H_{n, \vec{m}}$. Тогда

$$H_{n, \vec{m}} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_j}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m-1}^k \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Если для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f} , определенных равенствами (1), определитель $H_{n, \vec{m}} \neq 0$, то аппроксимации Эрмита–Якоби существуют, определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита–Паде, т. е.

$$\widehat{\pi}_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}) = \pi_{n_j, \vec{m}}^j(z; \mathbf{f}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (5)$$

Систему \mathbf{f} назовём вполне совершенной [4], если для любого мультииндекса (n, \vec{m})

$$\deg Q_m = m, \quad \deg P_{n_j}^j = n_j, \quad \text{НОД}(Q_m, P_{n_j}^j) = 1.$$

Следствие 1. Если система \mathbf{f} вполне совершенна, то для любого мультииндекса (n, \vec{m}) существуют аппроксимации Эрмита–Якоби и справедливы равенства (5).

Следствие 2. Теорема Якоби (см. [2]) является частным случаем теоремы 1.

Литература

1. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* М.: Мир, 1986.
2. Jacobi C. "Uber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2019. № 30. P. 127–156.
3. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О единственности решений задач Эрмита – Паде* // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. 2019. Т. 55. № 4. С. 445–456.
4. Старовойтов А. П., Рябченко Н. В. *О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде* // Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83. № 1. С. 17–36.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый из них задаёт функцию, определенную на всей действительной прямой.

Множество k -мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу:

Задача \mathbf{A}^t . Для набора тригонометрических рядов (1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$ и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg P_j^t \leq n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где \tilde{a}_l^j , \tilde{b}_l^j , как и коэффициенты тригонометрических многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$, могут быть, вообще говоря, комплексными числами.

Если пара (Q_m^t, P^t) , где $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, является решением задачи \mathbf{A}^t , то многочлены $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x), \dots, P_k^t(x)$ и рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_{j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

будем называть, соответственно, *тригонометрическими многочленами Эрмита–Паде* и *тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде* (совместными аппроксимациями Эрмита–Фурье) для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы \mathbf{f}^t функций.

Определение. Рациональные функции вида

$$\hat{\pi}_j^t(x) = \hat{\pi}_{n_j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где тригонометрические многочлены $\hat{Q}_m^t(x) = \hat{Q}_{n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\hat{P}_j^t(x) = \hat{P}_{n_j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$ имеют степени, соответственно, не выше m и n_j , $n_j = n + m - m_j$, будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Якоби для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы функций \mathbf{f}^t , если $\hat{\pi}_j^t(x)$ представима своим рядом Фурье и

$$f_j^t(x) - \frac{\hat{P}_j^t(x)}{\hat{Q}_m^t(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), \quad j = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Многочлены $\hat{Q}_m^t(x)$, $\hat{P}_1^t(x), \dots, \hat{P}_k^t(x)$, удовлетворяющие условиям (2), будем называть *тригонометрическими многочленами Эрмита–Якоби*.

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство функций (параметр $\lambda \in \mathbb{R}$), представленных тригонометрическими рядами

$$G(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x} (\cos(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \cos lx,$$

$$H(x; \lambda) = e^{\lambda \cos x} (\sin(\lambda \sin x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \sin lx.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{G}_k = \{G(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{G}_k)\}_{j=1}^k$, и при соответствующей нормировке для их знаменателя и числителей справедливы представления: при $j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m^t(x; \mathbf{G}_k) &= \hat{Q}_{n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{G}_k) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} = \\ &= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(x) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2, \\ \hat{P}_j^t(x; \mathbf{G}_k) &= \hat{P}_{n_j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{G}_k) = \operatorname{Re} \left\{ P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\}, \end{aligned}$$

где многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$, $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).

Теорема 2. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор различных не равных нулю действительных чисел. Тогда для мультииндекса $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, удовлетворяющего условию $n \geq \max_{1 \leq j \leq k} m_j$, и системы функций $\mathbf{H}_k = \{H(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\hat{\pi}_j^t(x; \mathbf{H}_k)\}_{j=1}^k$ и при соответствующей нормировке справедливы представления: при $j = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m^t(x; \mathbf{H}_k) &= \hat{Q}_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{H}_k) = Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} = \\ &= \frac{1}{[(n+m)!]^2} \left| \int_0^{+\infty} T(x) e^{-t(\cos x + i \sin x)} dt \right|^2, \\ \hat{P}_j^t(x; \mathbf{H}_k) &= \hat{P}_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{H}_k) = \text{Im} \left\{ P_{n_j}^j(e^{ix}; \mathbf{E}_k) \cdot \overline{Q_m(e^{ix}; \mathbf{E}_k)} \right\}, \end{aligned}$$

где многочлены $Q_m(z; \mathbf{E}_k)$, $P_{n_j}^j(z; \mathbf{E}_k)$ представляются в виде интегралов Эрмита (см. [1, гл. 4, § 2]).

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования в рамках государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025".

Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность*. М.: Наука, 1988.
2. Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П. *Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье* // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

М.Б. Танирбергенов

В 1994 году П.Д.Лакс [1] предложил элементарный способ вычисления регуляризованного следа оператора Штурма–Лиувилля, т.е. методом «деформации» потенциала по параметру $t \in [0, 1]$, который справедлив для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке методом Лакса вычисляется регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & -\frac{1}{x} + q(x) \\ -\frac{1}{x} + q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции из класса $C^2[0, \pi]$.

Лемма 1. Пусть $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$. Тогда

1) общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{cases} \varphi_1(x, \lambda) = C_1 \left(\frac{\cos \lambda x}{\lambda} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2} \right) + C_2 \left(-\sin \lambda x - \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \right), & \text{при } \lambda \neq 0, \\ \varphi_2(x, \lambda) = C_1 \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + C_2 \cos \lambda x, \\ \varphi_1(x, \lambda) = \frac{C_1}{x}, & \text{при } \lambda = 0; \\ \varphi_2(x, \lambda) = C_2 x, \end{cases}$$

2) собственные значения и ортонормированные собственные вектор-функции граничной задачи (1), (2) соответственно имеют вид:

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad n \neq 0,$$

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \\ \sin nx \end{pmatrix}, \quad n \in Z, \quad n \neq 0;$$

3) выполняются тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n,1}^2(x) + y_{-n,1}^2(x) - y_{n,2}^2(x) - y_{-n,2}^2(x)] = \frac{1}{2} [\delta(x) + \delta(x - \pi)],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2y_{n,1}(x)y_{n,2}(x) + 2y_{-n,1}(x)y_{-n,2}(x)] = 0, \quad (0 < x < \pi)$$

где $\delta(x)$ – «дельта»-функция Дирака.

Лемма 2. Ряды

$$\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)], \quad \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t)$$

сходятся в обобщенном смысле и их сумма не зависит от t .

Теорема. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения граничной задачи (1), (2), тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)].$$

Литература

1. Lax P. D. *Trace Formulas for the Schroedinger operator* // Comm. Pure and Appl. Math. 1994. Vol. XLVII. P. 503-512.
2. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака*. – Москва, «Наука», 1988.
3. Левитан Б.М. *Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма-Лиувилля* // УМН. 1964. Т. 19 (115). № 1. С. 161-165.
4. Яхшимуратов А.Б. *Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака методом П.Д. Лакса*. // УзМЖ. 1998. № 6. С. 76-80.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.А. Фирсов, М.М. Васьковский

Пусть H и U – сепарабельные гильбертовы пространства; B , B_1 и B_2 – произвольные банаховы пространства; $\mathcal{L}_2(H, U)$ – множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из H в U .

Замечание. Некоторые обозначения, которые мы будем использовать без определения, такие как $\|\cdot\|_{\tilde{X}, 2\alpha, \beta}$, \hat{C}^α и др., определяются так же, как и в [1].

Определение 1. Множество функций от двух переменных $h : [0, T] \times [0, T] \rightarrow B$, для которых

$$\|h\|_\alpha := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{\|h_{s,t}\|_B}{|t-s|^\alpha} < \infty,$$

обозначим через $C_2^\alpha([0, T]^2, B)$, где $\alpha \in (0, 1]$.

Если $f \in C^\alpha([0, T], B)$ – непрерывная по Гёльдеру функция от одной переменной, то $f_{s,t} := f(t) - f(s) \in C_2^\alpha([0, T]^2, B)$, где $s, t \in [0, T]$.

Определение 2. Пусть $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Под $\mathcal{C}^\alpha([0, T], H)$ будем понимать множество всех пар (X, \mathbb{X}) таких, что процесс $X \in C^\alpha([0, T], H)$, а $\mathbb{X} \in C_2^{2\alpha}([0, T]^2, H \otimes H)$ является процессом второго порядка над X , то есть выполняется следующее тождество Чена:

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = X_{s,u} \otimes X_{u,t}$$

для любой тройки $(s, u, t) \in [0, T]^3$.

Рассмотрим эволюционное уравнение следующего вида:

$$du_t = Lu_t dt + f(u_t) dt + g(u_t) d\mathbf{X}_t, \quad u_0 = \xi \in U, \quad (1)$$

где $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H)$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$; $f : U \rightarrow U$, $g : U \rightarrow \mathcal{L}_2(H, U)$; L – отрицательно определённый самосопряжённый оператор, порождающий аналитическую C_0 -полугруппу на U , которую будем обозначать как $\{S_t\}_{t \geq 0}$. В качестве примера такого оператора L может выступать оператор Лапласа Δ , при $U = H = L^2[0, 1]$.

Уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$du_t = Lu_t dt + F(u_t) d\tilde{\mathbf{X}}_t, \quad u_0 = \xi \in U, \quad (2)$$

где $F(u_t) = \begin{pmatrix} f(u_t) \\ g(u_t) \end{pmatrix}$ и $\tilde{\mathbf{X}}_t = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{X}_t \end{pmatrix}$.

Уравнение (2) для случая, когда $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], \mathbb{R}^d)$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, было исследовано на существование и единственность решений в работах [1] и [2]. В данной работе показывается, что их результаты можно перенести на случай, когда $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $Y \in C^\alpha([0, T], B)$ управляется грубой траекторией $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H \times [0, T])$ в соответствии с полугруппой $\{S_t\}_{t \geq 0}$, если существует такой элемент $Y' \in C^\alpha([0, T], \mathcal{L}_2(H \times [0, T], B))$, что выражение

$$R_{s,t}^Y := Y_t - S_{t-s}(Y_s + Y'_s \tilde{X}_{s,t})$$

удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$. Под $\mathcal{D}_{S, \tilde{X}}^{2\alpha}([0, T], B)$ будем понимать множество всех таких пар (Y, Y') .

Определение 4. Пространство функций $f : B_1 \rightarrow B_2$, имеющих непрерывные и ограниченные производные Фреше до порядка k включительно, будем обозначать через $C_b^k(B_1, B_2)$.

Определение 5. Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим через U_β сепарабельное гильбертово пространство $D((-L)^\beta)$ с нормой $\|\cdot\|_{U_\beta} = \|(-L)^\beta \cdot\|_U$.

Лемма 1. Пусть $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H \times [0, T])$ для некоторого $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ и $(Y, Y') \in \mathcal{D}_{S, \tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}_2(H \times [0, T], U_\beta^2))$. Тогда интеграл

$$\int_s^t S_{t-r} Y_r d\tilde{\mathbf{X}}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[t_i, t_{i+1}] \in \mathcal{P}} S_{t-t_i} (Y_{t_i} \tilde{X}_{t_i, t_{i+1}} + Y'_{t_i} \tilde{\mathbb{X}}_{t_i, t_{i+1}}) \quad (3)$$

корректно определён и для каждого $0 \leq \gamma < 3\alpha$ выполняется оценка

$$\left\| \int_s^t S_{t-r} Y_r d\tilde{\mathbf{X}}_r - S_{t-s} Y_s \tilde{X}_{s,t} - S_{t-s} Y'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t} \right\|_{U_{\beta+\gamma}} \leq C (\|R^Y\|_{2\alpha} \|\tilde{X}\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha-\gamma},$$

где C – универсальная постоянная.

Лемма 2. Пусть $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$, $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H \times [0, T])$, $F \in C_b^2(U_\gamma, U_\gamma^n)$, для каждого $\gamma \geq \beta$, $(u, u') \in \mathcal{D}_{S, \tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], U_\beta)$ и $(Z_t, Z'_t) := (F(u_t), DF(u_t)u'_t)$. Также предположим, что $u \in L^\infty([0, T], U_{2\alpha+\beta})$ и $u' \in L^\infty([0, T], U_{2\alpha+\beta}^2)$. Тогда $(Z, Z') \in \mathcal{D}_{S, \tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], U_\beta^n)$ и существует константа $C_F = C_F(T)$ такая, что выполняется оценка

$$\|(Z, Z')\|_{\tilde{\mathbf{X}}, 2\alpha, \beta} \leq C_F (1 + \|\tilde{X}\|_\alpha)^2 (1 + \|u\|_{\infty, 2\alpha+\beta} + \|u'\|_{\infty, 2\alpha+\beta} + \|(u, u')\|_{\tilde{\mathbf{X}}, 2\alpha})^2,$$

при этом константа C_F зависит от оценок на F и её производных.

Введём пространство

$$\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], U_\beta) := \mathcal{D}_{S, \tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], U_\beta) \cap (\hat{C}^\alpha([0, T], U_{2\alpha+\beta}) \times L^\infty([0, T], U_{2\alpha+\beta})).$$

Определение 6. Пусть $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ и $T > 0$, тогда отображение $u \in C^\alpha([0, T], U)$ будем называть слабым решением задачи Коши (2) на промежутке $[0, T]$, если выполняются следующие условия:

- 1) $(u, u') \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], U)$, где $u' = F(u)$;
- 2) $(F(u), (F(u))') \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}_2(H \times [0, T], U_\gamma^2))$, $\forall \gamma \geq -2\alpha$, где $(F(u))' = DF(u)F(u)$;
- 3) $\forall t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$u_t = S_t \xi + \int_0^t S_{t-r} F(u_r) d\tilde{\mathbf{X}}_r,$$

где интеграл в правой части понимается в смысле (3), при $Y_t = F(u_t)$.

Теорема. Пусть $\xi \in U$, $\alpha \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$, $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], H \times [0, T])$ и $F \in C_b^3(U_\gamma, \mathcal{L}_2(H \times [0, T], U_\gamma^2))$ для каждого $\gamma \geq -2\alpha$. Тогда существует единственное слабое решение уравнения (2) на промежутке $[0, T]$.

Доказательство теоремы главным образом основано на леммах 1 и 2, а также – на теореме Банаха о неподвижной точке.

Литература

1. Gerasimovics A., Hairer M. *Hormander's theorem for semilinear SPDEs* // Electron. J. Probab. 2019.
2. Friz P.K., Hairer M. *A Course on Rough Paths*. Universitext. Springer, Cham, 2020. With an introduction to regularity structures; Second edition. P. 219–223.

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.П. Шилин

Проведено дальнейшее исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^n [(a(t)A_k(t) + b(t)B_k(t)) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{\pi i} (a(t)A_k(t) - b(t)B_k(t)) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}] = f(t), \quad t \in L,$$

с интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару. В этом уравнении L — простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости, $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $f(t)$ — заданные на этой кривой H -непрерывные (т.е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции, $\varphi(t)$ — искомая на L функция, H -непрерывная вместе со своими производными до порядка n включительно.

Актуальным вопросом представляется нахождение функций $A_k(t)$, $B_k(t)$, $k = \overline{0, n}$, для которых возможно точное аналитическое решение уравнения. Два таких случая были указаны автором на предыдущих «Еругинских чтениях», соответствующие подробные результаты опубликованы затем в [1, 2]. Укажем два новых случая при $n \geq 3$:

1. $A_k(t) = (\alpha_k - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+1} + \lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2})t + (k+1)(\alpha_{k+1} - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+2} + \lambda_1\lambda_2\alpha_{k+3})$,
 $B_k(t) = (\beta_k - (\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+1} + \mu_1\mu_2\beta_{k+2})t + (k+1)(\beta_{k+1} - (\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+2} + \mu_1\mu_2\beta_{k+3})$.
2. $A_k(t) = (\alpha_k - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+1} + \lambda_1\lambda_2\alpha_{k+2})t^2 + ((\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_{k+2} - 2\alpha_{k+1})t + 2\alpha_{k+2}$,
 $B_k(t) = (\beta_k - (\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+1} + \mu_1\mu_2\beta_{k+2})t^2 + ((\mu_1 + \mu_2)\beta_{k+2} - 2\beta_{k+1})t + 2\beta_{k+2}$.

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_k, \beta_k, k = \overline{0, n+3}$, — заданные комплексные числа, причем $\alpha_k = \beta_k = 0$ при $k = 0, 1, n+1, n+2, n+3$, $\alpha_n = \beta_n = 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Корни многочленов $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2}\lambda^k$, $Q(\mu) = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_{k+2}\mu^k$ предполагаются однократными, $P(\lambda_k) \neq 0$, $Q(\mu_k) \neq 0$, $k = 1, 2$.

В этих случаях выписаны явно условия разрешимости уравнения, а при их выполнении приведены формулы решения. Используются обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, метод вариации произвольных постоянных для линейных дифференциальных уравнений с учетом дополнительных условий на решение.

Литература

1. Шилин А.П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 6–15.
2. Шилин А.П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 4. С. 358–369.

FACTORIZATION OF PARTLY RATIONAL MATRIX OF AN ARBITRARY ORDER

S.V. Rogosin, L.P. Primachuk and M.V. Dubatovskaya

The results of this report deals with the constructive factorization of matrix-functions (see, e.g., [1]), i.e. representation of the non-singular square $n \times n$ matrix-function G defined on a simple closed curve Γ in the following form

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

where the matrices $G^+(t), G^-(t)$ possess an analytic continuation into domains $D^+ = \text{int } \Gamma$, $D^- = \text{ext } \Gamma$, and $\Lambda(t)$ is a diagonal matrix

$$\Lambda(t) = \text{diag} \{t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, \dots, t^{\alpha_n}\}$$

with integer numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (called partial indices of the factorization (1)).

The problem of factorization consists of determination of the factors $G^+(t), G^-(t)$ and calculation of partial indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. It is an old problem dealing initially with the solution to vector-matrix boundary value problems, but now connecting with many mathematical questions and having a lot of applications (see [2]). Several methods were proposed to solve the factorization problem constructively for different classes of matrices. Some of these methods are connected with an approach by G.N.Chebotarev [3] who factorized triangular matrix-function applying the method of continued fraction.

In this work, it is proposed an algorithm for solution of the factorization problem for matrix-functions of arbitrary $n \times n$ order with partly rational entries. The algorithm is efficient for the case when $n-1$ columns or $n-1$ rows consist of rational functions. Without loss of generality we can suppose that rational are the last $n-1$ columns. If not one can multiply by certain constant matrices of the unit determinant the given matrix in order to interchange columns or to transpose it. By multiplication of the given matrix on certain polynomial we can reduce the case of the matrix with rational columns to the case of the matrix with polynomial columns. Our method generalizes the method of factorization of the triangular matrix function of an arbitrary order [4] and the method of reduction of the 2×2 matrix-function with a rational column/row to the triangular matrix-function [5].

Below we describe the scheme of our method. For simplicity we restrict our attention to the case of 3×3 matrix-functions with two rational columns defined and non-singular on the unit circle $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$:

$$G(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & Q_1(t) & P^{(m)}(t) \\ f_2(t) & Q_2(t) & P^{(n)}(t) \\ f_3(t) & Q_3(t) & P^{(k)}(t) \end{pmatrix}, \quad \det G(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Here $Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)$ are polynomials of certain (arbitrary) orders, $P^{(m)}(t), P^{(n)}(t), P^{(k)}(t)$ are polynomials of specified orders $k \leq n \leq m$ and $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ are arbitrary functions.

First step. Let us represent the ratio of polynomials $\frac{P^{(n)}(t)}{P^{(k)}(t)}$ in the (finite) continued fraction

$$\frac{P^{(n)}(t)}{P^{(k)}(t)} = S_0(t) + \frac{1}{S_1(t) + \frac{1}{S_2(t) + \dots + \frac{1}{S_l(t)}}}.$$

Then we multiply the matrix $G(t)$ from the left by the matrices T_0, T_2, \dots

$$T_{2r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S_{2r}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 0, 2, \dots,$$

and from the right by the the matrices T_1, T_3, \dots

$$T_{2r+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -S_{2r+1}(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 0, 2, \dots$$

We obtain the matrix whose second element of the last column is equal to 0.

Second step. By multiplying this matrix by certain constant matrix we interchange the first and the second rows. We apply the same approach as before and to reduce the matrix to the following form

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) & \tilde{Q}_1(t) & 0 \\ \tilde{f}_2(t) & \tilde{Q}_2(t) & 0 \\ \tilde{f}_3(t) & \tilde{Q}_3(t) & P^{(\nu)}(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Third step. The next step is based on the following

Lemma. [4, Lemma 1] *Let Γ be a simple smooth closed contour, and $B(t), t \in \Gamma$ be a non-singular Hölder continuous square matrix-function of the order n having the following form:*

$$B(t) = \begin{pmatrix} A(t) & \mathbf{0} \\ b_1(t) \dots b_{n-1}(t) & c(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suppose that the non-singular square matrix-function $A(t)$ of the order $n - 1$ admits factorization

$$A(t) = X^+(t) \Lambda(t) X^-(t),$$

where $\Lambda(t) = \text{diag} \{t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_{n-1}}\}$. Then the matrix-function $B(t)$ possesses factorization if the following matrix does:

$$\begin{pmatrix} \Lambda(t) & \mathbf{0} \\ (\mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_1^-(t)) \dots (\mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_{n-1}^-(t)) & c(t) \end{pmatrix}.$$

Here $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_{n-1}(t))$ is the row of first $n - 1$ entries of the lowest row of $B(t)$, $\mathbf{Y}_j^-(t) = (y_{1j}^-(t), \dots, y_{n-1,j}^-(t))^T$ is the j -th column of the matrix-function $Y^-(t) = (X^-(t))^{(-1)}$, and

$$(\mathbf{b}(t)|\mathbf{Y}_j^-(t)) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(t) y_{kj}^-(t).$$

Final step. Factorization of the matrix $A(t)$ corresponding to (2) with the second rational (polynomial) column is obtained by the method of [5].

Acknowledgement. This research is partially supported by the State Program of the Scientific Investigations ‘‘Convergence-2025’’, grant 1.7.01.4.

References

1. Kisil A. V., Abrachams I. D., Mishuris G., Rogosin S. V. *The Wiener-Hopf technique, its generalizations and applications: constructive and approximate methods* // Proc. R. Soc. A. 2021. Vol. 477. № 2254. Paper No. 20210533. 32 pp.
2. Rogosin S., Mishuris G. *Constructive methods for factorization of matrix-functions* // IMA Journal of Applied Mathematics. 2016. Vol. 81. №2. P. 365–391.
3. Chebotarev, G. N. *Partial indices of the Riemann boundary value problem with triangular matrix of the second order*// Uspekhi mat. nauk. 1956. Vol. XI. № 3. 192–202 (in Russian)
4. Primachuk L., Rogosin S. *Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. № 1. P. 129–137.
5. Primachuk L. P., Rogosin S. V. and Dubatovskaya M. V. *On factorization of partly non-rational 2 × 2 matrix-functions* // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. 2022. Vol. 176. № 3. P. 403–410.

MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMATION WITH FOX H-FUNCTION IN THE KERNEL IN THE WEIGHTED SPACES OF SUMMABLE FUNCTIONS

O. V. Skoromnik, M. V. Papkovich

Multidimensional integral transform

$$(Hf)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\mathbf{x}\mathbf{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0) \tag{1}$$

is studied. Here (see [1]; [2]; [3], Section 28.4; [4], ch. 1; [5]; [6]) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^n be the n -dimensional Euclidean space; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$ denotes

their scalar product; in particular, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{n=1}^n x_n$ for $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. The expression $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ means that $x_1 > t_1, x_2 > t_2, \dots, x_n > t_n$, the nonstrict inequality \geq has similar meaning; $\int_0^\infty = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$; by $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ we denote the set of positive integers, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$; $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ($k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) is a multi-index with $\mathbf{k}! = k_1! \cdot \dots \cdot k_n!$ and $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; for $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ $\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}$; $d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_n$; $\mathbf{t}^l = t_1^{l_1} t_2^{l_2} \dots t_n^{l_n}$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Let \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}$) be the n -dimensional space of n complex numbers $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$); $\frac{d}{d\mathbf{x}} = \frac{d}{dx_1 dx_2 \dots dx_n}$;

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0$ and $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0$ and $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$);

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}), \quad 1 \leq i \leq p, \quad a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C} \quad (1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n); \\ \mathbf{b}_j &= (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n}), \quad 1 \leq j \leq q, \quad b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C} \quad (1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n); \\ \bar{\alpha}_i &= (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}), \quad 1 \leq i \leq p, \quad \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_1^+ \quad (1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n); \\ \bar{\beta}_j &= (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n}), \quad 1 \leq j \leq q, \quad \beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_1^+ \quad (1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n). \end{aligned}$$

The function $H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\mathbf{x}\mathbf{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right]$ in the kernel of the (1) is the product of one type H -functions $H_{p, q}^{m, n}[z]$ [7, Chapters 1 and 2]:

$$H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\mathbf{x}\mathbf{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[x_k t_k \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right. \right].$$

Our paper is devoted to the study of transform (1) in the weighted spaces $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ -summable functions $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on $R_+^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in R^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0\}$, such that

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[\int_{R_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty$$

($\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, $1 \leq \bar{r} < \infty$, $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in R^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$).

The functional and compositional properties of the integral transformation (1) and some of its modifications in spaces $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ ($\bar{2} = (2, 2, \dots, 2)$, $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in R^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) have been studied in the works [1], [2], [5] and [6]. We continue this research. Theory of the considered integral transformation (1) in weighted spaces $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ is constructed. Mapping properties such as the boundedness, the range, the representation and the inversion of the transform (1) are established. The results presented generalize those obtained in [7, Chapter 4.1] for one-dimensional case.

References

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., and Shlapakov S. A., *Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43. №6, P. 1170–1178.
2. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. *One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels* // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020. P. 293–319.
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1993.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier Science, Amsterdam, 2006.
5. Papkovich M. V., Skoromnik O. V., *Multi-dimensional modified G - transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions* // Bulletin of the Vitebsk State university. 2022. №1 (114). P. 5–20 [in Russian].
6. Sitnik S. M., Skoromnik O.V., Papkovich M.V., *Multidimensional modified G- and H-transformations and their special cases* // Proceedings of the 10th International Scientific Seminar AMADE-2021, September 13 – 17, 2021, Minsk, Belarus, BSU. Minsk: IVC of the Ministry of Finance. 2022. P. 104 – 116.[in Russian]
7. Kilbas A. A. and Saigo M., *H-Transforms. Theory and Applications*. Chapman and Hall, Boca Raton, 2004.

SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. SECOND SINGLET STATE

S.M. Tashpulatov

We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the second singlet state. Hamiltonian of the system has the form

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (1)$$

Here, A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), τ which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$. and $a_{m,\gamma}^+$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric complex Fock space $(\mathcal{H}_{as}, (\cdot)_{\mathcal{H}_{as}})$. Suppose that φ_0 is the vacuum vector in the space \mathcal{H}_{as} . The second singlet state corresponds to the free motion of six electrons over the lattice and their interactions with the basic functions ${}^2s_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ \varphi_0$. The linear subspace ${}^2\mathcal{H}_s^0$, corresponding the second singlet state is the set of all vectors of the form

$${}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu} f(p, q, r, t, k, n) {}^2s_{p,q,r,t,k,n \in Z^\nu}^0, f \in l_2^{as},$$

where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^6)$. We denote by ${}^2H_s^0$ the restriction of operator H to the subspace ${}^2\mathcal{H}_s^0$.

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^6) \rightarrow L_2((T^\nu)^6) \equiv {}^2\mathcal{H}_s^0$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu) = 1$. We set ${}^2\tilde{H}_s^0 = \mathcal{F} {}^2H_s^0 \mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 1. *The Fourier transform of operator ${}^2H_s^0$ is an operator ${}^2\tilde{H}_s^0 = \mathcal{F} {}^2H_s^0 \mathcal{F}^{-1}$ acting in the space $L_2^{as}((T^\nu)^6)$ be the formula*

$$\begin{aligned} {}^2\tilde{H}_s^0 {}^2\psi_s^0 &= h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + \\ &+ U \int_{T^\nu} [f(t, \lambda + \mu - t, \gamma, \theta, \eta, \xi) + f(t, \mu, \gamma, \lambda + \theta - t, \eta, \xi) + \\ &+ f(t, \mu, \gamma, \theta, \eta, \lambda + \xi - t) + f(\lambda, t, \mu + \gamma - t, \theta, \eta, \xi) + \\ &+ f(\lambda, t, \gamma, \theta, \mu + \eta - t, \xi) + f(\lambda, \mu, t, \gamma + \theta - t, \eta, \xi) + \\ &+ f(\lambda, \mu, t, \theta, \eta, \gamma + \xi - t) + f(\lambda, \mu, \gamma, t, \theta + \eta - t, \xi) + f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, t, \eta + \xi - t)] dt, \end{aligned} \quad (2)$$

where $h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) = 6A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i + \cos \eta_i + \cos \xi_i]$, and L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

Theorem 2. *a). Let $\nu = 1$, and $U < 0$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2]$, and discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is consists of a unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, what lies to the below than the left edge of the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$. Here, and hereafter $a = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}$, $e = 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$, $f = 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}$, $z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}$.*

b). Let $\nu = 1$, and $U > 0$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is the union of seven segment's: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\tilde{z}_3, b+d+\tilde{z}_3] \cup [a+e+\tilde{z}_2, b+f+\tilde{z}_2] \cup [a+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3, b+\tilde{z}_2+\tilde{z}_3] \cup [c+e+\tilde{z}_1, d+f+\tilde{z}_1] \cup [c+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3, d+\tilde{z}_1+\tilde{z}_3] \cup [e+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2, f+\tilde{z}_1+\tilde{z}_2]$, and discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is consists of a unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3\}$, what lies to the above than the right edge of the essential spectrum of operator

${}^2\tilde{H}_s^0$. Here $\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\tilde{z}_2 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $\tilde{z}_3 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}$.

We consider the case $\nu = 3$, and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$, $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$. We let W denote the Watson integral: [1] $W = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 1,516$. Because the measure λ is normalized, $J = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \frac{W}{3}$.

Theorem 3. A). If $U < 0$, and $U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$, and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of unique eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$. Here and hereafter $a_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $e_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, $f_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, and z_1, z_2 , and z_3 are the same concrete numbers.

B). If $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of four segments: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [a_1 + z_2 + z_3, b_1 + z_2 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [c_1 + z_1 + z_3, d_1 + z_1 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1] \cup [e_1 + z_1 + z_2, f_1 + z_1 + z_2]$, and discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

C). If $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of two segments: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1]$, and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

D). If $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of two segments: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3, b_1 + d_1 + z_3]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2, b_1 + f_1 + z_2]$, or $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z_1, d_1 + f_1 + z_1]$, and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

$-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, or $U < 0$, $-\frac{4B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < 0$, and $\cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ consists of the union of unique segment: $\sigma_{ess}({}^2\tilde{H}_s^0) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1]$, and the discrete spectrum of operator ${}^2\tilde{H}_s^0$ is empty set: $\sigma_{disc}({}^2\tilde{H}_s^0) = \emptyset$.

References

1. Valkov V. V., and Ovchinnikov S. G., and Petrakovskii O. P. *The Excitation Spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional Ferromagnets*. Sov. Phys. Solid State. 1986. Vol. 30. PP. 3044-3047.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ДИАБЕТА ПЕРВОГО ТИПА НА УРОВЕНЬ ГЛЮКОЗЫ В КРОВИ ПАЦИЕНТА

А.И. Астровский

Математическое моделирование биологических процессов, протекающих в теле пациента, представляет собой фундаментальную междисциплинарную проблему на стыке медицины, биологии и математики. От разработки адекватных математических моделей заболеваний во многом зависят глобальные успехи в его лечении, профилактики и организации системы оказания медицинской помощи [1]. В 2004 году Novotka [2] вместе со своими коллегами разработал математическую модель диабета первого типа, в которой управляющими воздействиями являются дозы инсулина и количество углеводной пищи, принятой пациентом в определенное время. В качестве выходных функций (измерений, наблюдений) берется концентрация глюкозы в плазме крови пациента.

Математическая модель диабета первого типа, моделирующая глюкозо-инсулиновое взаимодействие в теле пациента (модель Novotka) представляет собой систему из десяти обыкновенных (существуют обобщения и на уравнения с запаздыванием) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, включающую в себя возмущения в виде приема углеводной пищи и управляющие воздействия, характеризующие инсулиновые инъекции.

Модель Novotka основана на следующих переменных, описывающих глюкозо-инсулиновые процессы в теле пациента:

$\nu(t)$ – проглоченная углеводная пища в минуту (g/min);

$D_1(t)$ – количество глюкозы в желудке ($mmol$);

$D_2(t)$ – количество глюкозы в пищеварительном тракте ($mmol$);

$U_G(t)$ – скорость абсорбции глюкозы ($mmol/min$);

$Q_1(t)$ – количество глюкозы в кровяном потоке ($mmol$);

$Q_2(t)$ – количество глюкозы в периферийных тканях ($mmol$);

$F_{01}^c(t)$ – скорость потребления глюкозы ($mmol/min$) в центральной нервной системе;

$F_R(t)$ – скорость поглощения глюкозы в почках пациента ($mmol/min$);

$x_1(t)$ – показатель влияния инсулина на транспортировку и распространение глюкозы;

$x_2(t)$ – показатель влияния инсулина на утилизацию глюкозы;

$x_3(t)$ – показатель действия инсулина на выработку эндогенной глюкозы в печени;

$I(t)$ – концентрация инсулина в плазме крови (mU/L);

$S_1(t)$ – количество инсулина в крови (mU);

$S_2(t)$ – количество инсулина в периферийных тканях (mU);

$G(t)$ – уровень глюкозы в крови пациента ($mmol/L$).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает динамику фазового вектора $z(t) = (D_1(t), D_2(t), I(t), S_1(t), S_2(t), Q_1(t), Q_2(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, с помощью которого моделируется глюкозо-инсулиновое взаимодействие в теле пациента.

Для описания глюкозо-инсулиновых процессов в теле конкретного пациента необходимо идентифицировать 16 параметров: k_e , k_{12} , k_{a1} , k_{a2} , k_{a3} , k_{b1} , k_{b2} , k_{b3} , τ_D , τ_S , A_G , Bw , V_I/Bw , V_G/Bw , EGP_0/Bw , F_{01}/Bw , которые, как и начальные условия, индивидуальны для каждого пациента. Подробное смысловое описание этих параметров можно найти в [2, 3]. Чтобы использовать указанную модель для различных прогнозов следует для каждого пациента вычислить (определить) набор его индивидуальных параметров. Например, для определенного типа пациентов были найдены следующие значения параметров: $k_e = 0.138$; $k_{12} = 0.066$; $k_{a1} = 0.006$; $k_{a2} = 0.06$; $k_{a3} = 0.03$; $k_{b1} = 3.07 \cdot 10^{-4}$; $k_{b2} = 4.92 \cdot 10^{-4}$; $k_{b3} = 0.0016$; $\tau_D = 40$; $\tau_S = 55$; $A_G = 0.8$; $Bw = 60kg$; $V_I/Bw = 0.12$; $V_G/Bw = 0.16$; $EGP_0/Bw = 0.0161$; $F_{01}/Bw = 0.0097$. При этом начальные условия при $t_0 = 0$ имеют вид:

$$z(t_0) = (7, 13, 0, 0, 0, 100, 20, 0, 0, 0).$$

Для адекватного математического описания глюкозо-инсулинового взаимодействия в теле пациента необходимо провести обследование пациента, в ходе которого следует получить данные о приеме углеводной пищи в течение суток, программе ввода инсулина, а также значения уровня глюкозы в крови пациента в заданные моменты времени (значения выходной функции $y(t) = G(t)$). С помощью минимизации отклонений значений выходной функции от расчетных значений выхода, полученных по системе дифференциальных уравнений, можно найти подходящие значения требуемых параметров. Однако возникает вопрос о точности определения указанных параметров. Так как точность определения уровня глюкозы в крови пациента составляет три – пять процентов, то представляется важным найти коэффициенты эластичности уровня глюкозы по параметрам модели.

После такой предварительной подготовки можно использовать указанную модель для расчета управляющих воздействий (т.е. выбора программы ввода инсулиновых инъекций). При этом необходимо учитывать, что целью управления является попадание в указанные границы в заданные моменты времени уровней глюкозы в крови пациента, а скорость изменения уровней глюкозы ограничена конкретным значением. Предварительные расчеты показывают, что определенные параметры модели достаточно находить с двадцати процентной точностью.

В докладе обсуждается методика оценки точности определения параметров математической модели диабета первого типа на основе анализа чувствительности изменения уровня глюкозы в крови пациента.

В модели Novorka в качестве управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ принято рассматривать скорость введения определенной дозы инсулина в определенное время. Другими словами, если назначается инъекция инсулина, то указывается величина дозы инсулина, конкретное время подкожной инъекции этой дозы и продолжительность инъекции. Для математического моделирования инъекций инсулина предлагается использовать специальные аппроксимации дельта-функций. Вычислительный эксперимент с такими функциями приведен в [3].

Одной из важных задач, возникающих при изучении диабета первой степени, является задача определения состояний пациента на основании измеренных значений подкожной концентрации глюкозы. Поэтому естественным образом возникают классические проблемы математической теории управления — наблюдаемость и построение оценщиков (эстиматоров) состояний пациента [4 – 6].

Литература

1. Карпелов В.А., Филипов Ю.И., Тарасов Ю.В., Боярский М.Д., Майоров А.Ю., Шестакова М.В., Дедов И.И. Математическое моделирование системы регулирования гликемии у пациентов с сахарным диабетом // Вестник РАМН. 2015. № 70(5). С. 549–560.

2. Novorka R., Canonico V., Chassin L.J. and etc. *Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabetes* // Physiological measurement. 2004. Vol. 25 (4). P. 905–920.
3. Астровский А.И. *Вычислительный эксперимент с математической моделью диабета первого типа* // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2021. Том 29. № 1-2. С. 40-50.
4. Астровский А.И., Гайшун И.В. *Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370 – 379.
5. Astrovskii A.I., Gaishun I.V. *Observability of Linear Time-Varying Systems with Quasiderivative Coefficients* // SIAM J. Control and Optimization. 2019. Vol. 57, № 3. P. 1710 – 1729.
6. Астровский А.И., Гайшун И.В. *Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений*. – Минск: Беларус. навука, 2013.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ И ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ

В.В. Веденяпин

В классических работах (см. [1–4]), уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия [5–11]. Получающийся вывод уравнений типа Власова даёт уравнения Власова–Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее [12–15]. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям [5–8], как это делалось раньше уже самим А.А. Власовым [4]. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона–Якоби, как это делалось уже в квантовой механике [16] и в общем гамильтоновом подходе [17–22]. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна–Маккри, нерелятивистский аналог решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет проанализировать Лямбду Эйнштейна и темную энергию [22–24].

Литература

1. Фок В. А. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: ЛКИ, 2007.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
3. Вейнберг С. *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1975.
4. Власов А. А. *Статистические функции распределения*. М.: Наука, 1966.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова* // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
6. Веденяпин В. В., Негматов М.-Б. А., Фимин Н.Н. *Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия*.// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
7. Веденяпин В. В., Негматов М.А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса*. // СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.
8. Веденяпин В. В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*. М.: Физматлит, 2001.
9. Веденяпин В. В. *Уравнение Власова–Максвелла–Эйнштейна* // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 188.
10. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. *The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits* // International Journal of Modern Physics D. 2020. V. 29. № 1. 23 p.
11. Vedenyapin, V., Fimin, N., Chechetkin, V. *The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models* // European Physical Journal Plus. 2020. № 400. 14 p.

12. Cercignani C., Kremer G. M. *The relativistic Boltzmann Equation: theory and applications*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2002.
13. Choquet–Bruhat Y. *Introduction to general relativity, black holes and cosmology*. New York: Oxford University Press, 2015.
14. Rein G., Rendall A. D. *Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov–Einstein system with small initial data*. // Commun. Math. Phys. 1992. 150. P. 561–583.
15. Kandrup H. E., Morrison P. J. *Hamiltonian structure of the Vlasov–Einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters* // Ann. Phys. 1993. V. 225. P. 114–166.
16. Madelung E. *Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form)*. // Z Phys. 1926. 40. P. 322–326.
17. Аржаных И. С. *Поле импульсов*. Наука, Ташкент, 1965.
18. Долматов К. И. *Поле импульсов аналитической динамики*. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Ташкент. 1950.
19. Козлов В. В. *Гидродинамика гамильтоновых систем* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. №6. 10–22.
20. Козлов В. В. *Общая теория вихрей*. Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998.
21. Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.
22. Gurzadyan V. G. *On the common nature of Dark Energy and Dark Matter* // Eur. Phys. J. Plus. 2019. 134. P. 14.
23. Vedenyarin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. *The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equations system* // European Physical Journal Plus. 2021. 136. № 670.
24. Веденяпин В. В., Воронина М. Ю., Руссков А. А. *О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия*. // Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–13.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.М. Волков, Е.И. Качаловская

Преимущества спектральных методов в наибольшей мере проявляются при решении задач, входные данные которых обладают достаточной гладкостью. В докладе исследованы возможности эффективного использования указанного класса методов для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Рассмотрена модельная краевая задача, на примере которой проиллюстрированы возможные приемы сглаживания входных данных для обеспечения эффективности спектрального метода в случае разрывных коэффициентов:

$$\frac{d}{dx}\sigma(x)\frac{du}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad (1)$$

$$u(\pm 1) = 0. \quad (2)$$

Для решения задачи (1)–(2) использован спектральный метод коллокации Чебышева [1, 2] и результаты сопоставлялись с результатами, полученными методом конечных разностей.

Рассмотрены два случая, в первом из которых исследована возможность использования супергауссовой функции для приближения коэффициента $\sigma(x)$ прямоугольной формы:

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp(-(2x)^{2n}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

При этом решение задачи (1)–(2) полагалось гладким, $u(x) = \cos(2\pi(x^2 - 0.25)/3)$, а правая часть приобретала разрыв в точке разрыва коэффициента при $n \rightarrow \infty$. Второй

случай — задача с постоянным коэффициентом $\sigma(x) = \text{const}$ и правой частью в виде дельта-функции $f(x) = -2\delta(x)$, решение которой имеет разрыв первой производной при $x = 0$: $u(x) = 1 - |x|$, $u'(x) = -\text{sign}(x)$.

При сглаживании коэффициентов относительная точность 10^{-10} достигалась, когда на разрыв приходилось не менее девяти точек сетки. Например, при $n = 40$ для достижения такой точности общее число узлов чебышёвской сетки превышает $N = 900$. При $n = 80$ и $N = 1000$ (четыре точки на разрыв коэффициентов) относительная погрешность спектрального метода сопоставима с погрешностью метода конечных разностей и превышает 10^{-6} .

Для аппроксимации дельта-функции первоначально использовалось выражение

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} g(x) = \delta(x-x_0), \quad (4)$$

однако, такое сглаживание оказалось совершенно непригодным для моделирования точечного источника, поскольку точность спектрального метода оказывалась при этом существенно хуже, чем точность метода конечных разностей. В качестве аппроксимации дельта-функции лучше всего подходит вторая спектральная производная от фундаментального решения задачи. В этом случае, очевидно, погрешность будет сравнима с вычислительной погрешностью. Данный подход может быть использован при моделировании точечных источников в рамках многомерного уравнения Пуассона и более сложных задач с неоднородными и разрывными коэффициентами.

Литература

1. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2000.
2. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЕ ПЛОДОРОДИЕ ПОЧВЫ

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

В работе [1] было предложено дифференциальное уравнение, описывающее уровень плодородия почвы x с учетом только двух наиболее важных факторов: типа почвообразующей породы (материнской породы) p , которая служит основой (каркасом) для формирования почвы, и влаги W , которая является жизненной основой растений, почвенной фауны и микрофлоры:

$$\dot{x} = \gamma \cdot (p - x^2)x - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\gamma, \delta > 0$ — константы, W_- — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ — ее избыток ($0 < W_- < W_+$). При изменениях влажности, выходящей за пределы отрезка $[W_-, W_+]$, наблюдаются катастрофы типа «сборка», т.е. скачкообразные изменения плодородия x . Хотя уровень плодородия зависит и от ряда других факторов: химических, физико-химических, биологических, мы сконцентрировали внимание на чисто физических факторах, формирующих почву и обеспечивающих ее плодородие.

При изменении факторов p и W , не пересекающих бифуркационное множество, состояние плодородия x может пребывать в устойчивом стационарном равновесии $dx/dt = 0$. Однако, факторы p, W при этом не меняются. Поэтому интересно найти равновесие, когда могут меняться все переменные x, p, W . Для этого используем теорию дифференциальных игр [2], позволяющую найти оптимальное *позиционное управление* $p^*(x), W^*(x)$, обеспечивающие равновесие Нэша для «игроков» p и W и называемое также стратегией Маркова.

Рассмотрим дифференциальную игру «игроков» p и W с ненулевой суммой

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)p + g_2(x)w, \tag{2}$$

$$f(x) = -x^3, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = -\delta, \quad w = (W - W_-)(W - W_+),$$

$$V_1^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_1(x) + p^2] dt, \quad V_2^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_2(x) + w^2] dt,$$

$$Q_1(x) = Q_2(x) = [2\gamma + \gamma^2]x^4 + \delta^2 x^2 \geq 0.$$

Искомое оптимальное управление имеет вид

$$p^*(x) = -\frac{1}{2}g_1(x)(V_1^*)'(x), \quad w^*(x) = -\frac{1}{2}g_2(x)(V_2^*)'(x), \tag{3}$$

где $V_1^*(x) = V_2^*(x) = x^2$ являются решениями уравнения Гамильтона-Якоби

$$Q_1 + (V_1)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_2(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 = 0,$$

$$Q_2 + (V_2)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 [(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_1(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_1(x)]^2 [(V_1)'_x]^2 = 0.$$

Поскольку $p^*(x) = -x$ и тип почвообразующей породы практически не изменяется, то можно принять, что $\dot{x} \approx 0$, т.е. имеем стационарное равновесие. Иначе говоря, равновесие Нэша совпадет со стационарным. Наконец, система (2), (3) асимптотически устойчивая.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № государственной регистрации 122032300363-3).

Литература

1. Володченкова Л. А. *Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка»* // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.
2. Lewis F., Vrabie D., Syrmos V. *Optimal Control*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Ю.М Вувуникян, И.В. Трифонова, Ваньли Чэнь

В работе рассматривается нейронная сеть, математическая модель нейронов которой учитывает движение электрических токов в нейроне. Такая модель, в отличие от моделей с формальными нейронами, называется импульсной (или спайковой) моделью и является моделью 3-его поколения. Наиболее эффективной импульсной моделью в настоящее время признается математическая модель импульсной нейронной сети ФитцХью-Нагумо, которая детально моделирует динамику активации и деактивации нейронов на основе нелинейных дифференциальных уравнений Ван-дер-Поля [1]. Эта модель была предложена в 1961 году ФитцХью [2], а более общая модель разработана в 1962 году в работе [3] Нагумо и др.

Математическую модель нейрона ФитцХью-Нагумо в общем виде можно записать в виде следующей системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' + y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3 \\ y' + \alpha y = \beta x \end{cases}, \quad (1)$$

где x – мембранный потенциал, y – ток восстановления. Введя обобщенные импульсные характеристики [5], систему (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} (\delta' - \alpha_1 \delta) * x + \delta * y - \alpha_2 S_2(\delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}) - S_3(\delta^{\otimes 3} * x^{\otimes 3}) = \alpha_0 \\ (\delta' + \alpha \delta) * y - \beta \delta * x = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где δ' – обобщенная производная дельта-функции δ , $\delta^{\otimes 2}$ и $\delta^{\otimes 3}$ – тензорный квадрат и тензорный куб дельта-функции δ соответственно, т.е. $\delta^{\otimes 2} = \delta \otimes \delta$ и $\delta^{\otimes 3} = \delta \otimes \delta \otimes \delta$, S_2 и S_3 – операторы сокращения переменных второго и третьего порядков.

Левая часть системы (2) представляет полиномиальный эволюционный оператор [5] второй кратности третьей степени. Таким образом, математической модели нейрона ФитцХью-Нагумо соответствует полиномиальный эволюционный оператор. Отметим, что при этом параллельному соединению соответствует сложение эволюционных операторов, а последовательному соединению соответствует композиция соответствующих эволюционных операторов.

Часто полезно сводить математическую модель системы не к достаточно сложному кратному эволюционному оператору, а к более простому полиномиальному эволюционному оператору первой кратности. Эта задача несложно решается для математической модели нейрона ФитцХью-Нагумо.

Действительно, решая относительно функции y второе дифференциальное уравнение рассматриваемой системы (1), имеем

$$y(t) = \beta(K * x)(t) + y_0 = \beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds + y_0,$$

где $*$ – операция свертки, $K(t) = e^{-\alpha t}$, $y_0 = y(0)$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение рассматриваемой системы, получаем следующее уравнение:

$$x'(t) + \beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + x^3(t) - y_0. \quad (3)$$

Переносим y_0 в правую часть и обозначая $f(t, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + x^3(t) - y_0$, получаем эволюционное нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\beta \int_0^t K(t-s)x(s)ds + x'(t) = f(t, x).$$

Уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$x' + \beta K * x - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - x^3 = \alpha_0 - y_0$$

и, применяя введенные обозначения, получим уравнение

$$(\delta' + \beta K - \alpha_1 \delta) * x + S_2(-\alpha_2 \delta^{\otimes 2} * x^{\otimes 2}) + S_3(-\delta^{\otimes 3} * x^{\otimes 3}) = \alpha_0 - y_0. \quad (4)$$

Введем обобщенные импульсные характеристики:

$$a_1 = \delta' + \beta K - \alpha_1 \delta, \quad a_2 = -\alpha_2 \delta^{\otimes 2}, \quad a_3 = \delta^{\otimes 3}.$$

Тогда левая часть уравнения (4) может быть записана следующим образом:

$$a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2}) + S_3(a_3 * x^{\otimes 3}),$$

что соответствует канонической записи полиномиального эволюционного оператора третьей степени с обобщенными импульсными характеристиками.

Для обучения импульсной нейронной сети FitzHugh–Nagumo мы использовали платформу SNNtorch и метод пакетной нормализации, зависящий от порога (tdBN), основанный на пространственно-временном обратном распространении STBP, называемый «STBP-tdBN». В качестве простого примера применения модели рассмотрена задача классификации набора данных MNIST.

Литература

1. Van der Pol B. *On relaxation-oscillations* // Philosophical Magazine & Journal of Science. 1926. Vol. 2. № 11. P. 978.
2. FitzHugh R. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane* // Biophysical Journal. 1961. Vol. 1. Issue 6. P. 445–466.
3. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon* // Proceedings of the IRE. 1962. Vol. 50. P. 2061–2070.
4. Wilson H. R., Cowan J. D. *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons* // Biophys. J. 1972. Vol. 12. P. 1.
5. Вувуникян Ю. М. *Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: монография*. Гродно: ГрГУ, 2007.
6. Вувуникян Ю. М., Чэнь Ваньли *Последовательное соединение мультиполярных эволюционных операторов с обобщенными импульсными характеристиками* // XIII Белорусская математическая конференция: материалы Международной научной конференции. 2021. Ч. 1. С. 18–19.
7. Вувуникян Ю. М., Чэнь Ваньли *Операторное моделирование импульсной нейронной сети и прямое произведение реакций системных операторов* // Системы компьютерной математики и их приложения (СКМП-2022): сб. материалов XXIII Междунар. конф. 2022. Вып. 23. С. 202–210.

8. Вувуникян Ю.М., Чэнь Ваньли. *Методы прямого обучения глубоких импульсных нейронных сетей* // Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии. 2022. С. 112–116.

ДИФФУЗИЯ В СМЕСИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ОТ ЭНТРОПИИ СМЕШЕНИЯ

Н. Н. Гринчик, Г. М. Заяц

Проблеме диффузионного смешения газов посвящено большое количество работ, в которых освещаются различные подходы к исследованию этой проблемы. В данной работе впервые предлагается метод моделирования диффузии в смеси идеальных газов с использованием химического потенциала и энтропии смешения.

Известно, что для идеального газа его химический потенциал имеет вид

$$\mu_i = RT \ln(x_i) + \mu_0(T),$$

где x_i – молярная концентрация i -го компонента смеси, R – газовая постоянная, T – температура, $\mu_0(T)$ – стандартное состояние.

Предполагаем, что поток массы i -го компонента определяется не только его градиентом, но и степенью неупорядоченности смеси, то есть энтропией смешения

$$q_i = -D_i \Delta S_{\text{см}} x_i \nabla \mu_i, \quad (1)$$

где D_i – определяемый экспериментально коэффициент диффузии i -го компонента смеси; энтропия смешения $\Delta S_{\text{см}}$ [1, стр.201]

$$\Delta S_{\text{см}} = -R \left(\sum_{i=1}^N \frac{M_i}{v_i} \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i) \right);$$

$$\nabla \mu_i = R \ln(x_i) \nabla T + \frac{RT}{x_i} \nabla x_i, \quad (2)$$

M_i – масса, v_i – молярная масса i -го компонента смеси.

Полагаем, что смесь газов находится при невысоких давлениях и температурах, в связи с этим ее стандартное состояние не изменяется. Поэтому в дальнейшем градиент стандартного состояния $\nabla \mu_0(T)$ не учитывается. Кроме того, мы не будем учитывать градиенты давления, которые могут возникнуть при смешении легких и тяжелых компонентов смесей газов.

Подставив равенство (2) в соотношение (1), получим выражение для потока массы в единице объема i -го компонента смеси

$$q_i = -D_i \Delta S_{\text{см}} x_i R \left(\ln(x_i) \nabla T + \frac{T}{x_i} \nabla x_i \right). \quad (3)$$

Введем эффективный коэффициент диффузии

$$D_{i,\text{eff}} = D_i \Delta S_{\text{см}} R = D_i R^2 \left(\sum_{i=1}^N \frac{M_i}{v_i} \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \ln(x_i) \right).$$

Уравнение, описывающее одномерную диффузию i -го компонента смеси, имеет вид

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{i,\text{eff}} x_i \frac{\partial}{\partial x} (T \ln x_i) \right). \quad (4)$$

В случае изобарно-изотермической диффузии смеси газов формула (3) примет вид

$$q_i = -D_i \Delta S_{\text{cm}} RT \nabla x_i,$$

а уравнение диффузии i -го компонента смеси запишется в виде

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{i,\text{eff}} T \frac{\partial x_i}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Таким образом, уравнения (4), (5) могут быть использованы для моделирования диффузии в многокомпонентной смеси идеальных газов с учетом и без учета термодиффузии, соответственно.

Рассмотрим пример моделирования диффузионного процесса смешения двухкомпонентной газовой смеси в одномерной постановке при постоянных давлении и температуре.

Краевая задача. Пусть газы A и B находятся в баллоне длины l с непроницаемыми стенками и разделены непроницаемой мембраной. Мембрана находится на расстоянии $l/2$ от торцов баллона. В некоторый момент времени мембрану удаляют и идёт диффузионное смешение газов A и B . Для исследования эволюции во времени и зависимости от координаты x молярных концентраций x_1 и x_2 газов A и B требуется решить уравнение

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{1,\text{eff}} \frac{\partial x_1}{\partial x} \right) \quad \text{при условии} \quad x_1 + x_2 = 1 \quad (6)$$

с граничными

$$\left. \frac{\partial x_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial x_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (7)$$

и начальными условиями

$$x_1(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq l/2, \\ 0, & \text{при } l/2 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (8)$$

Необходимо учитывать, что мембрана не может быть удалена мгновенно. Функцию установления – условие, которое обеспечивает отсутствие разрывов как самой функции, так и её производных на середине $x = l/2$ баллона, представим в виде

$$x_1(l/2) = 1 - \frac{2}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}. \quad (9)$$

Феноменологический коэффициент диффузии $D_{1,\text{eff}}$ определяется из экспериментальных данных, может зависеть от масштаба осреднения. Поэтому для решения задачи необходимы соответствующие экспериментальные данные. Задача (6)-(9) решается численно сеточным методом.

Для исследования смешения идеальных газов можно использовать и статистический метод с применением вероятностного подхода, определением средних по большому ансамблю частиц характеристик. Однако данные методы всегда связаны с введением дополнительных гипотез о свойствах частиц, их взаимодействии и с упрощением этих

свойств. Во многих случаях не существует даже базы для построения таких методов. В тех же случаях, когда они построены, они обычно не являются эффективными средствами решения задачи в силу чрезмерной сложности соответствующих уравнений.

Предлагаемый подход является альтернативой не только использованию закона Фика, но и энтропийным методам моделирования в химической технике, базирующимся на законе сохранения информационной энтропии [2, 3].

Литература

1. Яворский Б. М., Детлаф А. А., Лебедев А. К. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов* / М. : ОНИКС, 2006.
2. Энтропийные методы моделирования в химической технике : межвуз. темат. сб. науч. тр. / Моск. ин-т хим. машиностроения. Москва : МИХМ, 1981 (вып. дан. 1982).
3. Майков В.П. *О выборе оптимального отбора продуктов при разделении бинарных смесей* // ДАН СССР. 1974. Т.215. №6. С.1421-1423.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Дун Цзинхуэй

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (1)$$

$$(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ — компоненты тензора диффузии (проводимости).

На прямоугольной сетке внутренних узлов:

$$\omega_h = \left\{ (x_n, y_k), x_m = y_m = \cos \frac{\pi m}{N+1}, n = 1, N, k = 1, N \right\}, \quad (3)$$

спектральный метод Чебышёва для задачи (1) – (2) приводит к системе линейных алгебраических уравнений [1]:

$$Au = f, \quad (4)$$

матрица которой строится на основе матрицы спектрального дифференцирования Чебышёва $D \in R^{N \times N}$ с учетом граничных условий (2):

$$A = A_{xx} + A_{yy} + A_{xy} + A_{yx}$$

$$A_{xx} = (I \otimes D) \cdot [S_{xx} \cdot (I \otimes D)], \quad A_{yy} = (D \otimes I) \cdot [S_{yy} \cdot (D \otimes I)],$$

$$A_{yx} = (D \otimes I) \cdot [S_{yx} \cdot (I \otimes D)], \quad A_{xy} = (I \otimes D) \cdot [S_{xy} \cdot (D \otimes I)]. \quad (5)$$

Здесь S_{xx}, S_{xy} и т.д. — диагональные матрицы соответствующих коэффициентов задачи, \otimes — символ кронекеровского произведения матриц, $I \in R^{N \times N}$ — единичная матрица.

Для решения системы (4) использован стабилизированный метод би-сопряженных градиентов (BICGSTAB) [2] с переобусловливателем произведения в виде диагональной матрицы коэффициентов D_σ и разностного аналога оператора Лапласа $-\Lambda$, обрабатываемого с использованием метода переменных направлений [3, 4]. Матрица $A \in R^{N^2 \times N^2}$, согласно формуле (4), имеет полную структуру. Поэтому произведение данной матрицы на вектор приближенного решения задачи $u \in R^{N^2 \times 1}$ в итерационном алгоритме более эффективно реализовать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{xx} \cdot u &: \bar{D} \cdot [\bar{\sigma}_{xx} \times (\bar{D} \cdot U)], & A_{xy} \cdot u &: \bar{D} \cdot [\bar{\sigma}_{xy} \times (U \cdot \bar{D})], \\ A_{yy} \cdot u &: [\bar{\sigma}_{yy} \times (U \cdot \bar{D})] \cdot \bar{D}, & A_{yx} \cdot u &: [\bar{\sigma}_{yx} \times (\bar{D} \cdot U)] \cdot \bar{D}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\bar{D} \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ — матрица спектрального дифференцирования Чебышёва без учета краевых условий, $U \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ и $\bar{\sigma}_{**} \in R^{(N+2) \times (N+2)}$ — двумерные массивы приближенного решения и соответствующих коэффициентов задачи на сетке, включающей граничные точки, символ " \times " использован для обозначения поэлементного умножения массивов (матриц).

Переобусловливатель D_σ применяется к системной матрице A до начала вычислений, а для обращения переобусловливателя Λ на каждой итерации воспользуемся итерационным методом переменных направлений (МПН). Таким образом, для реализации спектральной модели использованы два вложенных итерационных алгоритма. На внешнем цикле используется метод BICGSTAB, а на внутреннем — МПН. При этом, как было показано ранее [3, 5], достаточно не более 5-6 итераций МПН с оптимальным набором итерационных параметров для сходимости BICGSTAB с произвольной точностью.

Для исследования эффективности описанного выше метода была рассмотрена модельная задача вида (1)–(2) с коэффициентами

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \exp(-\alpha(x^2 + y^2)), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{mix}(1 - x^2)(1 - y^2) \quad (7)$$

и правой частью $f(x, y)$ такой, чтобы точное решение задачи (1) – (2) определялось функцией $u(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \exp(x^2 + y^2)$.

Как показали результаты численных экспериментов, при достижении относительной нормы невязки в итерационном методе BICGSTAB значения 10^{-9} относительная погрешность приближенного решения не превосходила этого значения при количестве узлов сетки в пределах от $N = 19$ и выше. Графики зависимости количества итераций метода BICGSTAB и относительных вычислительных затрат от количества узлов прямоугольной сетки по каждому координатному направлению представлены на рис. 1. Из представленных результатов можно сделать вывод, что количество итераций не зависит от размерности сетки. Вычислительную сложность одной итерации можно оценить величиной $Q(N) = O(N^3)$, что соответствует умножению матриц в формулах (6). Тем не менее, как следует из рис. 1, относительное время решения задачи из расчета на один узел сетки остается практически неизменным в диапазоне $N = 125 \div 275$. Таким образом, фактическая вычислительная сложность алгоритма близка к оптимальной.

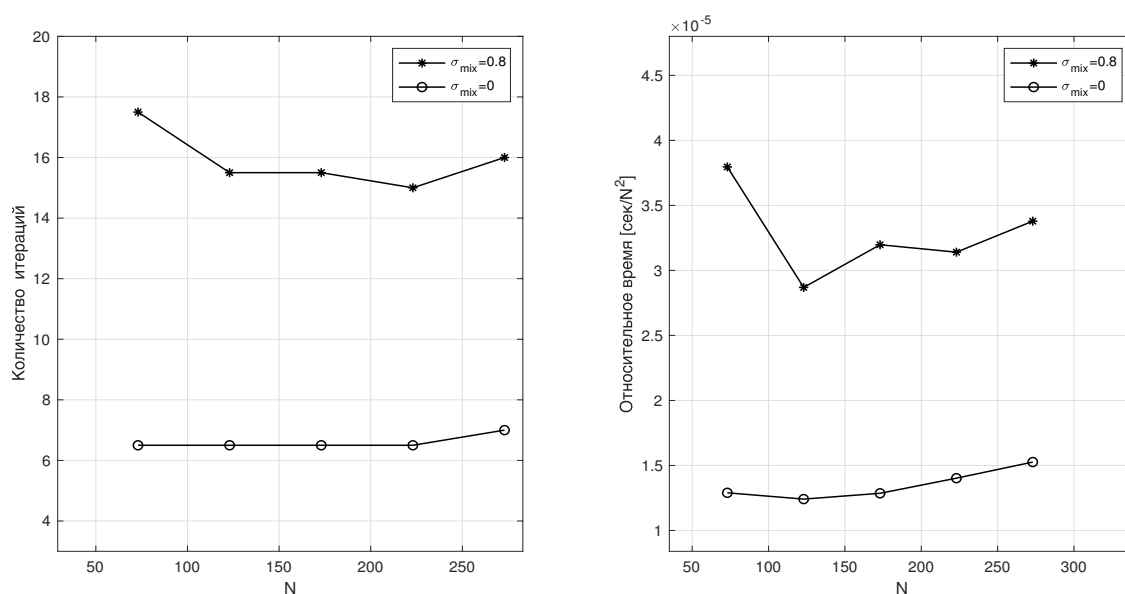


Рис. 1. Количество итераций и относительное время решения задачи при $\sigma_{mix} = 0$ (без смешанных производных) и $\sigma_{mix} = 0.8$.

Число итераций BICGSTAB и общие временные затраты при наличии смешанных производных возрастают и при $\sigma_{mix} = 0.8$ примерно в три раза превосходят данные показатели в случае $\sigma_{mix} = 0$ (см. рис.1.). Однако, качественные показатели эффективности алгоритма при наличии смешанных производных сохраняются и вычислительная сложность остается близкой к оптимальной.

Замечание. Известно, что умножение матриц спектрального дифференцирования Чебышёва на вектор можно оптимизировать с помощью алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье [1], понизив вычислительную сложность данной операции с $Q(N) = O(N^2)$ до $Q(N) = O(N \cdot \ln N)$. Однако, на практике данное преимущественно может быть реализовано лишь при больших $N \geq 1000$.

Литература

1. Trefet hen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. // Philadelphia: SLAM, 2000.
2. Van der Vorst, H.A. *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems* // SIAM J. Sei. Stat. Comput. 1992. Vol. 13. No. 2. P. 631-644.
3. Penzl T.A *cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations*[J]. //SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. 21(4). P. 1401-1418.
4. Самарский А А, Николаев Е С. *Методы решения сеточных уравнений*[J].М., Наука. 1978.
5. В. М. Волков, Е. И. Мацулевич, Дун Цзинхуэй *Итерационная реализация спектрального метода Чебышёва для двумерных эллиптических задач* // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - 2022)Ч. 2. - С. 76-78.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НАМАГНИЧЕННЫМИ ЭКРАНАМИ ИЗ ПЕРМАЛЛОЯ

В. Т. Ерофеенко, Г. Ф. Громыко, Г. М. Заяц

Работа посвящена математическому моделированию задачи экранирования, описывающей проникновение импульсных электромагнитных полей через плоский намагниченный экран из пермаллоя.

Физико-математическая модель. В трехмерном пространстве с электрической и магнитной постоянными ε_0 , μ_0 расположен плоский экран $D(0 < z < \Delta)$ из пермаллоя, ограниченный плоскостями $\Gamma_1(z = 0)$ и $\Gamma_2(z = \Delta)$. Предполагается, что в начальный момент времени экран намагничен. Из полупространства $D_1(z < 0)$ на слой D воздействует первичное импульсное электромагнитное поле \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 . В результате в области D_1 образуется отражённое поле \mathbf{E}'_1 , \mathbf{H}'_1 и суммарное электромагнитное поле $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$. В полупространство $D_2(z > \Delta)$ через экран D проникает поле \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 . В слое D из пермаллоя образуется электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} и поле намагниченности \mathbf{M} .

Математическая модель задачи экранирования основывается на использовании системы уравнений Максвелла. Дополнительно для моделирования поля намагниченности материала экрана \mathbf{M} используется уравнение Ландау-Лифшица [1], которое нелинейным образом связывает магнитное поле \mathbf{H} и поле \mathbf{M} .

Краевая задача. Для первичного поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 в области $D_1(z < 0)$, воздействующего на плоский экран $D(0 < z < \Delta)$, требуется определить электромагнитные поля \mathbf{E}'_1 , \mathbf{H}'_1 ; \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 в областях $D_1(z < 0)$, $D_2(z > \Delta)$ и поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{M} в слое D , которые удовлетворяют - уравнениям [2]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}'_1 = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}'_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}'_1 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}'_1, \quad z < 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_2, \quad z > \Delta, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\sigma} \mathbf{E}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{M} \times (\mathbf{H} + \dot{a} \Delta \mathbf{M} - \dot{g} \mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad 0 < z < \Delta, \quad (4)$$

где $\dot{\sigma}$ – проводимость пермаллоя, $\dot{\gamma}$, \dot{a} , \dot{g} – постоянные, \times – векторное произведение; - граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитных полей \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 ; \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , в областях D_1, D_2 и полей \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{M} в слое D на плоскостях Γ_1 , Γ_2 :

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau - \mathbf{H}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0; \quad (5)$$

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau - \mathbf{H}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z)|_{z=\Delta} = 0; \quad (6)$$

- граничным условиям для поля намагниченности на плоскостях Γ_1 , Γ_2 :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_x \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_y \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0; \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_x\right)\Big|_{z=\Delta} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_y\right)\Big|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{e}_z)|_{z=\Delta} = 0; \quad (8)$$

- условиям излучения на бесконечность в областях D_1, D_2 .

Импульсные электромагнитные поля, воздействующие на экран. Будем рассматривать воздействие первичного импульсного электромагнитного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ и магнитного поля \mathbf{H}_{sm} , ортогонально падающих на экран.

В качестве первичного поля рассмотрим импульсное поле

$$\mathbf{E}_0(z, t) = -B_0 (T^{(-)}) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_0(z, t) = \frac{1}{Z_0} B_0 (T^{(-)}) \mathbf{e}_x, \quad B_0(t') = Z_0 H_0 b(t'),$$

где H_0 – максимальное значение магнитного поля \mathbf{H}_0 , $T^{(-)} = (ct - z)/c\tau$, $\tau = 0.5 T_{imp}$, T_{imp} – длительность импульса, $t' = 2t/T_{imp}$ – безразмерное время, c – скорость света. Импульсную функцию $b(t')$ выберем в виде

$$b(t') = \begin{cases} 0.5 \sin(0.5\pi(10t' - 1)) + 0.5, & 0 \leq t' \leq 0.2, \\ 0.5 \cos(\pi/9(5t' - 1)) + 0.5, & 0.2 \leq t' \leq 2, \\ 0, & t' \leq 0, \quad t' \geq 2, \end{cases}$$

где $t' = t'_{fr} = 0.2$ – время фронта импульса, время, за которое импульс достигает максимального значения, $b(t'_{fr}) = 1$; $t' = t'_{half} = 1.1$ – время полуспада импульса, $b(t'_{half}) = 1/2$; $t' = t'_{imp} = 2$ – безразмерное время длительности импульса; при $t'_{fr} \leq t' \leq t'_{imp}$ функция монотонно убывает.

Магнитное поле \mathbf{H}_{sm} используется для возбуждения поля намагниченности \mathbf{M} в материале экрана. При этом при $t' \leq 0$ экран намагничен с постоянной намагниченностью вида

$$\mathbf{H}_{sm} = H_{sm}(z) \mathbf{e}_z, \quad H_{sm}(0) = 0, \quad H_{sm}(\Delta) = 0, \quad t' \leq 0.$$

При $t' > 0$ намагниченность экрана изменяется под воздействием внешнего импульсного поля.

Коэффициент эффективности экранирования. Для оценки экранирующих свойств экрана из пермаллоя используется коэффициент эффективности экранирования. Коэффициент эффективности экранирования, показывающий во сколько раз ослабевает электромагнитный импульс при прохождении через экран, определим формулой

$$\mathfrak{E} = \frac{\max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_0(0, t)|}{\max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_2(\Delta, t)|}.$$

Трехобластная краевая задача (1)–(8) преобразуется, следуя [3], в однообластную начально-краевую задачу для системы шести скалярных параболических нелинейных дифференциальных уравнений относительно компонент векторов магнитного поля и поля намагниченности. Разработан численный метод решения задачи на основе сеточного метода. Численно исследованы характеристики электромагнитного поля в экране в зависимости от начального импульса и начальной намагниченности экрана. На основе вычислительных экспериментов получены зависимости коэффициента экранирования от проводимости, толщины экрана и степени намагниченности экрана.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф22-106.

Литература

1. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М: Наука, 1989.
2. Ринкевич А. Б., Перов Д. В., Васьковский В. О., Лепаловский В. Н. *Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки* // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, вып. 9. С. 96–106.
3. Ерофеев В. Т., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. *Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1682–1697.

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА С АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков

В работе исследуется частица со спином 1 и аномальным магнитным моментом в присутствии внешних однородных электрического и магнитного полей: $A_t = -Ez$, $A_\phi = -\frac{Br^2}{2}$ (см. также [1–4]). Используется обобщенное 10-мерное уравнение Даффина – Кеммера в цилиндрических координатах (t, r, ϕ, z) и соответствующей тетраде

$$\left[\beta^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + iEz \right) + \beta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \frac{\partial_\phi + iBr^2/2 + J^{12}}{r} + \beta^3 \frac{\partial}{\partial z} - \Gamma J^{12} P - M \right] \Psi = 0,$$

где используются величины $\Gamma = \lambda B$, $[\Gamma] = 1/L$, $[B] = 1/L^2$, $[t] = L$, L обозначает размерность длины, параметр λ – безразмерный, матрица P выделяет векторную компоненту из 10-мерной волновой функции. Строятся решения с цилиндрической симметрией. На решениях диагонализуются операторы энергии и третьей проекции полного углового момента

$$\Psi = e^{-iet} e^{im\phi} \begin{pmatrix} h_0(r, z) \\ h_i(r, z) \\ E_i(r, z) \\ B_i(r, z) \end{pmatrix}.$$

После разделения переменных получена система из 10 дифференциальных уравнений 1-го порядка частных производных для 10 функций $F_A(r, z) = F_A(r)F_A(z)$, $A = 1 \dots 10$. С применением обозначений

$$\begin{aligned} W &= Ez - \epsilon, & a_m &= \frac{d}{dr} + \frac{m+Br^2/2}{r}, & b_m &= \frac{d}{dr} - \frac{m+Br^2/2}{r}, \\ a_{m+1} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+1+Br^2/2}{r}, & b_{m+1} &= \frac{d}{dr} - \frac{m+1+Br^2/2}{r}, \\ a_{m-1} &= \frac{d}{dr} + \frac{m-1+Br^2/2}{r}, & b_{m-1} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-1+Br^2/2}{r} \end{aligned}$$

она записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} b_{m-1} E_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_{m+1} E_3 - \frac{\partial}{\partial z} E_2 &= M h_0, & \frac{1}{\sqrt{2}} a_m B_2 - \frac{\partial}{\partial z} B_3 - iW E_1 - i\Gamma h_1 &= M h_1, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} a_{m+1} B_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_{m-1} B_3 - iW E_2 &= M h_2, & \frac{1}{\sqrt{2}} b_m B_2 + \frac{\partial}{\partial z} B_1 - iW E_3 + i\Gamma h_3 &= M h_3, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} a_m h_0 + iW h_1 &= M E_1, & -\frac{\partial}{\partial z} h_0 + iW h_2 &= M E_2, & -\frac{1}{\sqrt{2}} b_m h_0 + iW h_3 &= M E_3, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} b_m h_2 + \frac{\partial}{\partial z} h_3 &= M B_1, & \frac{1}{\sqrt{2}} b_{m-1} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{m+1} h_3 &= M B_2, & -\frac{\partial}{\partial z} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_m h_2 &= M B_3. \end{aligned} \tag{1}$$

С использованием метода Федорова – Гронского 10 переменных $F_A(r)$ выражаются только через 3 разные функции $f_1(r), f_2(r), f_3(r)$

$$\begin{aligned} h_3(r, z) &= h_3(z)f_1(r), & h_1(r, z) &= h_1(z)f_2(r), & h_0(r, z) &= h_0(z)f_3(r), \\ E_3(r, z) &= E_3(z)f_1(r), & E_1(r, z) &= E_1(z)f_2(r), & h_2(r, z) &= h_2(z)f_3(r), \\ B_1(r, z) &= B_1(z)f_1(r), & B_3(r, z) &= B_3(z)f_2(r), & E_2(r, z) &= E_2(z)f_3(r), \\ & & & & B_2(r, z) &= B_2(z)f_3(r), \end{aligned}$$

которые строятся в вырожденных гипергеометрических функциях.

Возникающая из (1) система 10 дифференциальных уравнений для функций $F_A(z)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}C_1B_2 + \frac{\partial}{\partial z}B_1 - iWE_3 + i\Gamma h_3 &= Mh_3, & -\frac{1}{\sqrt{2}}C_1h_0 + iWh_3 &= ME_3, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}C_1h_2 + \frac{\partial}{\partial z}h_3 &= MB_1, & \frac{1}{\sqrt{2}}C_2B_2 - \frac{\partial}{\partial z}B_3 - iWE_1 - i\Gamma h_1 &= Mh_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C_2h_0 + iWh_1 &= ME_1, & -\frac{\partial}{\partial z}h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_2h_2 &= MB_3, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C_3E_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_4E_3 - \frac{\partial}{\partial z}E_2 &= Mh_0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}C_4B_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}C_3B_3 - iWE_2 &= Mh_2, \\ -\frac{\partial}{\partial z}h_0 + iWh_2 &= ME_2, & \frac{1}{\sqrt{2}}C_3h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}C_4h_3 &= MB_2 \end{aligned}$$

решена с помощью метода, обобщающего известный подход, примененный при решении аналогичной задачи в декартовых координатах. В результате получаем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка для трех основных переменных, которая разбивается на одно независимое уравнение и систему двух связанных уравнений для двух других функций. Последняя система после диагонализации матрицы смешивания сводится к отдельным уравнениям для двух новых функций. Все три уравнения решаются в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

Литература

1. Kisel V., Voynova Ya., Ovsyuk E., Balan V., Red'kov V. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Magnetic Field* // NPCS. 2017. Vol. 20. № 1. P. 21–39.
2. Ovsyuk E.M., Voynova Ya.A., Kisel V.V., Balan V., Red'kov V.M. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* // Chapter in: Quaternions: Theory and Applications. Editor: Sandra Griffin. Nova Science Publishers, Inc. USA, 2017. P. 47–84.
3. Ovsyuk E., Voynova Ya., Kisel V., Balan V., Red'kov V. *Spin 1 Particle with Anomalous Magnetic Moment in the External Uniform Electric Field* // NPCS. 2018. Vol. 21. № 1. P. 1–20.
4. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory* V.V. Kisel [et al.]. // New York: Nova Science Publishers Inc. – 2018.; Vol II. Physical Problems.

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 3/2 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А.В. Ивашкевич, В.М. Редьков

В работах [1, 2] был исследован вопрос о нерелятивистском приближении в декартовых координатах для теории Паули–Фирца для релятивистской частицы со спином 3/2. В данной работе получена система радиальных уравнений, описывающая нерелятивистскую частицу со спином 3/2 в кулоновском поле, при этом исходили из найденной ранее системы радиальных уравнений для релятивистской свободной частицы со спином 3/2 в случае сферической симметрии [3]. При разделении переменных в [3] диагонализировались операторы энергии, квадрата и третьей проекции полного углового момента, и пространственного отражения.

Используемая в настоящей работе процедура нерелятивистского приближения основана на известной общей методике, в данном случае она осуществлена в системе радиальных уравнений. В результате выведена система двух зацепляющихся уравнений второго порядка, описывающая нерелятивистскую частицу со спином $3/2$ в состояниях с квантовыми числами энергии, квадрата и третьей проекции полного углового момента, и чётности. При этом учтено присутствие кулоновского поля. Выведенная система уравнений приводит к двум отдельным уравнениям для новых радиальных функций. Их решения найдены в вырожденных гипергеометрических функциях, получены соответствующие спектры энергии.

Ниже приведены несколько основных соотношений, более детальный анализ будет опубликован отдельно. Общая подстановка для волновой функции, отвечающей диагонализации операторов энергии, квадрата и третьей проекции полного момента частицы, и оператора четности имеет вид

$$\Psi = \begin{vmatrix} f_0 D_{-1/2} & f_1 D_{-3/2} & f_2 D_{-1/2} & f_3 D_{+1/2} \\ g_0 D_{+1/2} & g_1 D_{-1/2} & g_2 D_{+1/2} & g_3 D_{+3/2} \\ \delta g_0 D_{-1/2} & \delta g_3 D_{-3/2} & \delta g_2 D_{-1/2} & \delta g_1 D_{+1/2} \\ \delta f_0 D_{+1/2} & \delta f_3 D_{-1/2} & \delta f_2 D_{+1/2} & \delta f_1 D_{+3/2} \end{vmatrix}, \quad \delta = \pm 1;$$

здесь используются D -функции Вигнера [4, 5]: $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j(\phi, \theta, 0)$; $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$. Найденная в [3] релятивистская система радиальных уравнений в свободном случае имеет вид (учет кулоновского поля осуществляется формальной заменой $\epsilon \implies \epsilon + \alpha/r$)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{d}{dr} g_1 + \frac{1}{r} (f_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} g_1) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (b f_1 - a f_3 + a \sqrt{2} g_2) + im(g_2 - \sqrt{2} f_3) &= 0, \\ \sqrt{2} \frac{d}{dr} f_3 + \frac{1}{r} (g_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} f_3) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a g_1 + b g_3 + a \sqrt{2} f_2) + im(\sqrt{2} g_1 - f_2) &= 0, \\ -i\epsilon f_1 + \frac{d}{dr} f_1 + \frac{1}{r} f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r} (b f_2 + b f_0) + im g_3 &= 0, \\ -i\epsilon(\sqrt{2} f_2 - g_1) + (-\sqrt{2} \frac{d}{dr} f_0 + \frac{1}{dr} g_1) - \frac{1}{r} (\frac{1}{\sqrt{2}} (f_0 - f_2) - g_1) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}r} (a g_2 - a g_0) - im(f_3 + \sqrt{2}(g_0 - g_2)) &= 0, \\ -i\epsilon \sqrt{2} g_1 + \frac{1}{r} (f_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} g_1) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-b f_1 + a f_3 + a \sqrt{2} g_0) + im(\sqrt{2} f_3 + g_0) &= 0, \\ -i\epsilon \sqrt{2} f_3 + \frac{1}{r} (g_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} f_3) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a g_1 + b g_3 + a \sqrt{2} f_0) + im(\sqrt{2} g_1 - f_0) &= 0, \\ -i\epsilon(\sqrt{2} g_2 - f_3) + (-\sqrt{2} \frac{d}{dr} g_0 - \frac{d}{dr} f_3) - \frac{1}{r} (\frac{1}{\sqrt{2}} (g_0 + g_2) + f_3) + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-a f_2 - a f_0) + im(\sqrt{2} f_0 + \sqrt{2} f_2 - g_1) &= 0, \\ -i\epsilon g_3 - \frac{1}{dr} g_3 - \frac{1}{r} g_3 + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-b g_2 + b g_0) + im f_1 &= 0. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении волновая функция частицы со спином $3/2$ описывается 4-компонентной волновой функцией (при учете оператора пространственного отражения остается две независимых переменных L_1, L_2)

$$\Psi_{E,j,m,\delta} = e^{-iEt} \begin{vmatrix} L_1(r)D_{-3/2} \\ L_2(r)D_{-1/2} \\ L_5(r)D_{+1/2} \\ L_6(r)D_{+3/2} \end{vmatrix} = e^{-iEt} \begin{vmatrix} L_1(r)D_{-3/2} \\ L_2(r)D_{-1/2} \\ \delta L_2(r)D_{+1/2} \\ \delta L_1(r)D_{+3/2} \end{vmatrix}.$$

После необходимых вычислений выведена система нерелятивистских уравнений 2-го порядка для двух функций

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) \right] L_1 &= \frac{1}{r^2} [b^2 L_1 + 3bL_2], \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) \right] L_2 &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{2a(a+3) + b^2 + 10}{3} L_2 + bL_1 \right]. \end{aligned}$$

С использованием преобразования, диагонализующего матрицу смешивания, получаем отдельные уравнения для новых функций \bar{L}_1, \bar{L}_2

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{(j+2)^2 - 1/4}{r^2} \right] \bar{L}_1 &= 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + 2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{j^2 - 1/4}{r^2} \right] \bar{L}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Их решения строятся по стандартной методике в терминах вырожденных гипергеометрических функций (пусть $2\sqrt{-2mE}r = x$), при этом спектры энергий устанавливаются из требования полиномиальности

$$E_1 = -\frac{\alpha^2 m}{2N^2} = -\frac{\alpha^2 m}{2\left(j + \frac{5}{2} + n\right)^2}, \quad \bar{L}_1(x) = r^{j+3/2} e^{-\sqrt{-2mE}r} F(-n, 2j+5, x);$$

$$E_2 = -\frac{\alpha^2 m}{2N^2} = -\frac{\alpha^2 m}{2\left(j + \frac{1}{2} + n\right)^2}, \quad \bar{L}_2(x) = r^{j-1/2} e^{-\sqrt{-2mE}r} F(-n, 2j+1, x).$$

Литература

1. Ивашкевич А.В., Войнова Я.А., Овсюк К.М., Кисель В.В., Редьков В.М. *Частица со спином 3/2: теория Паули-Фирца, нерелятивистский предел* // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2020. Т. 56. № 3. С. 335–349.
2. Ивашкевич А.В., Василюк О.А., Овсюк Е.М., Кисель В.В., Редьков В.М. *Теория Фрадкина частицы со спином 3/2, нерелятивистский предел* // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2021. Том. 57, № 3. С. 353–373.
3. Ivashkevich, A.V. *Solutions with spherical symmetry of the equation for a spin 3/2 Particle* // Chapter in: Understanding Quaternions. - Eds. Du Peng, Haibao Hu, Dong Ding, and Zhouyue Li. New York: Nova Science Publishers Inc. 2020. P. 67–104.
4. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975.
5. Редьков, В.М. *Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера*. Минск: Белорусская наука, 2011.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РИСКОВ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ РЕГИОНОВ

М.В. Карпиеня

Изучение динамического поведения сложных социально-экономических систем строится на исследовании моделей системной динамики. Для предикативной оценки рисков конкурентоспособности регионов рассмотрим марковскую модель [1]. При проведении исследования возникают следующие задачи: определение факторов риска, построение иерархической графовой модели причинно-следственных связей, определение минимальных сечений, построение графа состояний для выделенных минимальных сечений, решение систем дифференциальных уравнений, определенных графами состояний, оценка риска исходя из полученных вероятностей критических событий с применением сценарного подхода.

Корневым событием причинно-следственного графа является потеря конкурентоспособности региона. Ребра графа - потенциальные переходы между состояниями системы. Для каждого минимального сечения рассмотрим сетевую структуру возможных переходов между состояниями. Для подобной структуры может быть составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова-Чепмена. Построенная система описывает влияние причин через узлы следствия на корневую вершину причинно-следственного графа. Для решения системы дифференциальных уравнений используются численные методы (напр., метод Рунге-Кутты с автоматической настройкой шага) [2]. В результате получаем вероятности реализации рисков в узлах графа состояний в заданные моменты времени.

В матричной форме система уравнений имеет вид

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = M \star \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ \dots \\ P_s(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $P_i(t)$ - вероятность пребывания элементов системы в состоянии i в момент времени t , M - инфинитезимальная матрица переходов, которая строится на основе графа состояний.

Матрица переходов M формируется на основании пуассоновских параметров реализации событий, соответствующих минимальному сечению.

Для каждого i -го состояния необходимо составить дифференциальное уравнение

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{k=0}^s (m_{ki} P_k(t)) - \sum_{k=0}^s (m_{ik} P_i(t)), \quad (2)$$

элементы m_{ij} матрицы M соответствуют вероятностям перехода из состояния i в состояние j .

В результате решения приведенных систем возникает возможность оценить вероятность снижения конкурентоспособности из-за критических сочетаний событий как функцию времени.

Литература

1. Белополюская Я.И. *Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики: учебное пособие.* Издательство "Лань" 2019.
2. Маталыцкий М.А. *Элементы теории случайных процессов: [учебное пособие для математических специальностей вузов].* Гродно: ГрГУ, 2004.
3. Харин Ю.С. *Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика.* Минск: БГУ, 2011.

**ПРИМЕНЕНИЕ ТИПА ФУНКЦИИ КОШИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

О.О. Курбанбаев, К.Д. Джакаева

В работе рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

где коэффициенты $a_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, и функция $f(x)$ определены и непрерывны в некотором интервале (a, b) .

Если известна фундаментальная система y_1, y_2, \dots, y_n решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$, то общее решение неоднородного уравнения (1) может быть всегда найдено методом Лагранжа или методом Коши [1-3]. Согласно методу Коши, частное решение линейного неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad x_0 \in (a, b), \tag{2}$$

находится по формуле Коши

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x, t) f(t) dt, \tag{3}$$

где $K(x, t)$ – функция Коши, определяемая по формуле

$$K(x, t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix},$$

в которой $W(x)$ – определитель Вронского системы функций y_1, y_2, \dots, y_n . Когда вычисление интеграла (3) затруднительно, то можно использовать $\tilde{K}(x, t)$ – функцию типа Коши, определяемая по формуле

$$\tilde{K}(x, t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & \dots & y'_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-3)}(t) & y_2^{(n-3)}(t) & \dots & y_n^{(n-3)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

При помощи функции $\tilde{K}(x, t)$ решение задачи (1),(2) определяется в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^x \tilde{K}(x, t)z(t)dt,$$

где $z(x)$ – частное решение уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dx} + a_1(x)z = f(x).$$

Например, для задачи Коши $y'' = 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ функции $\tilde{K}(x, t) = 1$, $z(x) = 3x^2$ и решение при помощи этих функций имеет вид

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x \tilde{K}(x, t)z(t)dt = 3 \int_0^x t^2 dt = x^3.$$

Если применить функцию $K(x, t) = x - t$, то решение определяется в виде

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x K(x, t)f(t)dt = 6 \int_0^x (x - t)t dt = x^3.$$

Литература

1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 2003.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: “Физматлит”, 2010. З. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи*. М.: Высшая школа, 1989.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Н.П. Мацука, А.Н. Авлас, Г.Ф. Громько, А.Ф. Ильющенко, А.В.Лешок

Композиционные материалы имеют большой круг приложения в современных технологических процессах: упрочняющие, теплозащитные, фрикционные или антифрикционные покрытия и др. Дисперсные или волокнистые включения меняют эксплуатационные характеристики материала по целому ряду физико-механических свойств. Некоторые свойства, например, плотность, теплоемкость, могут быть рассчитаны по правилу смесей и показывают неплохое сравнение с результатами экспериментального исследования этих свойств. Однако, одной их характеристик композита, которая чувствительна к наличию в нем включений, является эффективный коэффициент теплопроводности. Известно, что теория смесей для расчета коэффициента теплопроводности совершенно непригодна. Существующие расчетные формулы для нахождения коэффициента теплопроводности [1], как правило, получены в результате обработки экспериментальных данных. Оценку эффективных характеристик композиций можно делать с помощью математического моделирования.

В представленной работе рассмотрены фрикционные покрытия, используемые для тормозных дисков. Режимы работы тормозного диска связаны, в первую очередь, с распределением тепловых полей в процессе работы сил трения между тормозным диском и контртелом при торможении. Наиболее перспективными для узлов трения являются материалы, получаемые методом порошковой металлургии, так как технология порошковой металлургии позволяет в широких пределах варьировать состав, соответственно, свойства материала, получать материалы, которые невозможно получить традиционной металлургией, вводить в состав материала добавки различной природы и функционального назначения. Повышение износостойкости материалов узлов трения, работающих в условиях сухого трения и в условиях тяжелого нагружения, является на сегодняшний день одной из основополагающих задач. Решение данной задачи возможно за счет разработки материалов с высокой теплопроводностью. Актуальным является расчет коэффициента теплопроводности фрикционного материала на стадии разработки материала.

Учитывая размер частиц (от 10 мкм), структуру композиционного материала (от трех компонентов) и их расположение в матрице, а также физико-механические и тепловые свойства фаз, характер контактного взаимодействия и технологические особенности фрикционных покрытий, математическое моделирование работы фрикционного диска в полной постановке требует использования очень мелкой сетки. Для реальных размеров тормозных дисков это приводит к громоздким вычислениям и большим временным затратам. Особое внимание в работе уделено расчету и изучению коэффициента теплопроводности композиционного материала.

В работе использован ранее предложенный метод нахождения коэффициента теплопроводности композиционного материала на основе представительного объема [2]. Для материалов с регулярной структурой в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Рассматривается такой прием, в котором выбирается относительно небольшая по размерам область, для которой можно ввести достаточно подробную сетку, чтобы отразить наличие структурных элементов. Общий подход к постановке задачи моделирования заключается в формулировке краевых задач теплопроводности для выбранного представительного объема. Так, для нахождения эффективного коэффициента теплопроводности, моделируется процесс распространения тепла по неоднородной среде, в которой теплофизические характеристики матрицы и включений могут сильно отличаться. Полагаем, что химические реакции между компонентами отсутствуют.

По анализу металлографического изображения реальной структуры покрытия строится карта образца. Представительный объем этой композиционной системы отражает структурные компоненты включений по форме и ориентации и с заданной степенью точности соответствует их объемному процентному содержанию в покрытии. Полагаем, что все включения распределены равномерно во всем объеме композиционного покрытия. Выбираем представительный объем системы так, чтобы он отражал все основные особенности покрытия и регулярно повторялся в покрытии. Причем размеры представительного объема должны быть больше характерных размеров включений, но меньше характерного размера покрытия диска [3].

Решением тепловой задачи с помощью сеточного метода является распределение температуры во всех точках выбранной сетки. С использованием процедуры осреднения по представительному объему можно получить интегральную характеристику, соответствующую количеству теплоты, накопленному в композиционном материале. Представляя выбранный объем как однородный, можем найти коэффициент теплопроводности, который и принимается за эффективный коэффициент теплопроводности для неоднородной среды. Описанный метод позволяет получить температурную зависимость эффективно-

го коэффициента теплопроводности. Например, выбирая краевые условия для тепловой задачи с разным диапазоном температур, получим распределение температуры в объеме. По описанной методике находим эффективный коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры из выбранного диапазона.

Эффективность предлагаемого численного метода протестирована на двухкомпонентном материале, состоящем из 40% графита и 60% бронзы. Такой выбор сделан для удобства применения следующих двух методик: по правилу смеси коэффициент теплопроводности этого материала равен 145,2 Вт/(м·К), по формуле Оделевского – 106,15. Расчетные результаты моделирования: для крупнодисперсного графита (100 мкм) – 82,88, для мелкодисперсного (10 мкм) – 69,08 Вт/(м·К). Экспериментальным путем установлено, что коэффициент теплопроводности для материала с крупнодисперсным графитом составил 75,4, тогда как с мелкодисперсным 64,1 Вт/(м·К). Таким образом, предлагаемый метод показывает не только наиболее близкие результаты к эксперименту, но и отражает существенное влияние размера частиц композиционного материала на коэффициент теплопроводности, что в других способах не учитывается вообще.

К преимуществам предлагаемого метода относится не только зависимость от размера частиц, входящих в состав композиционного материала, но и учет возможной анизотропии каждого компонента (т.е. отличие коэффициента теплопроводности композиционного материала в разных направлениях), а также температуру. В итоге получаем наиболее полную систему расчета эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала в зависимости от различных внешних и внутренних факторов.

Использование численного моделирования ускорит процесс, позволит сократить время, связанное с изготовлением экспериментальных образцов, проведением длительных стендовых и ресурсных испытаний. Программа расчета эффективного коэффициента теплопроводности окажется полезной для разработчиков теплопроводящих материалов, предназначенных для использования в радиоэлектронной промышленности, а так же для теплоизолирующих материалов – в области строительства.

Литература

1. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов* // Л.: Энергия, 1974.
2. Громько Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф., Лешок А. В. *Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала* // Порошковая металлургия. Минск. 2020. С. 12–18.
3. Барздокас Д. И., Зобнин А. И. *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры* // М.: Едиториал УРСС, 2003.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ИНВАЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В БИОСИСТЕМАХ

А. Ю. Переварюха

Рассматривается моделирование особых ситуаций, когда регулируемое противодействие агрессивно размножающемуся виду в биологическом сообществе вырабатывается с запаздыванием и приводит к резкому переходу в фазу депрессии численности вселенца. Для остановки распространения вредоносного инвазивного вида сейчас часто проводится специальная интродукция вида-антагониста, но эффективность такого метода подавления на практике непостоянная. Биокibernетика развивает методики активного вмешательства и подавления инвазивных процессов. Разработаны

дифференциальные уравнения для специфических сценариев популяционной динамики, описывающие активность вида-антагониста против чужеродной популяции. Уравнения включают два механизма борьбы, с коадаптацией и с запаздывающей активацией воздействия. В вычислительном эксперименте получен сценарий преодоления глубокой депрессии для атакуемого вида с высоким репродуктивным коэффициентом и с дальнейшим установлением равновесного состояния. Примером описанной ситуации служит динамика растущей колонии бактерий, задействовавших адаптационный механизм защиты после вселения нового вируса-бактериофага. Преодоление кризиса в взаимодействии начинается, если эндонуклеаза системы *CRISPR/Cas* через некоторое время у выживших бактерий обучается распознавать выбранные особые короткие фрагменты ДНК у данного штамма вируса и разрывать в этом месте цепочку нуклеотидов. По причине коадаптации терапия с бактериофагами теряет эффективность — они вместе эволюционируют.

Направление моделирования лимитированного средой роста продолжает развиваться в современных модификациях и с необычными коэффициентами, например с $\dot{N} = rF(N(t))^\Theta$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t)/(K + \vartheta N))^\Theta}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}.$$

Решения подобных моделей описывают уравнивающиеся процессы $\forall N(0) > 0$. Не все уравнения имеет смысл дополнять включением $t - \tau$. Основное отличие у разных моделей ограниченного роста — положение точки перегиба $N_p \neq 0$ на графике решения $N(t)$. Для модели ордината точки перегиба $N_p = K/2$, абсцисса $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$. Положение ординаты точки перегиба N_p важно установить для задачи оптимальной эксплуатации и анализа сценариев с изъятием $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$. Прирост численности в точке N_p максимизируется. Тогда популяция демонстрирует лучшую продуктивность, а весь излишек прироста можно изымать. Концепция чрезвычайно опасна для промысла популяций с критическими пороговыми состояниями. Модель $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N)$ с запаздывающей регуляцией, но без параметра ниши K с $f(x) = rxe^{-bx}$ предложена на основе опытов с мухами А. Николсона:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t).$$

При увеличении $r\tau$ решение демонстрирует релаксационные колебания с $\min N_*(t) \rightarrow \epsilon$.

В работе сравним динамику разработанной нами детерминированной модели инвазионного процесса для агрессивного вселенца с $N(t - \tau)$ и модель инвазии в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания τ возмущена равномерно распределенной случайной величиной $\gamma \in [-0.5, 0.5]$, что отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу особей-вселенцев. Для включения стохастической компоненты лучше возмущать именно величину запаздывания $\gamma\tau$, что качественно отразится на сценариях завершения инвазионного процесса. Возмущение репродуктивного параметра не несет существенного смысла, но стохастика запаздывания позволяет рассматривать сценарии — сравнивать различные варианты, актуальные для разрушающих среду вредителей.

Нами проведена разработка модели специфических экстремальных кризисных процессов популяций вне равновесного состояния популяции со средой на базе систем уравнений с возмущенным запаздыванием и с пороговыми триггерными функциями. Исследуемые экстремальные биофизические процессы происходят при инвазиях агрессивных чужеродных видов в адаптирующуюся среду [1]. Время адаптации нового биотического

окружения и восстановление исчерпанных активным вселенцем ресурсов среды стали важными характеристиками популяционного процесса [2], которые мы в новых моделях отразим запаздыванием различного феноменологического типа. Эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. В результате биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса с кризисом в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим \ln_K -регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t - \nu))$ и при $\mathcal{Q} > q, m \geq 2, N(0) < J < \mathcal{K}$ так:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau)} \right) - \mathcal{Q} \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t). \quad (1)$$

Разработанной нами модели (1) на начальном этапе идет увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$. Далее рост остановлен. Вместо стабилизации $N(t) \rightarrow K, N(t_s) < K$ или превышения равновесия K начинается стадия резкого кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \rightarrow J$ и потенциал роста еще не нивелирован \ln_K -регуляцией.

При анализе стремительных инвазий и инфекций актуален сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \rightarrow \mathcal{K}$ не будет устойчивой. Стохастическое возмущение динамики значимо при активации противоборства в состоянии критическом для среды. При приближении к порогу разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации важно, вариативно, но не менее τ_1 . Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель инвазии с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \quad (2)$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению $J, N(0) < J < \mathcal{K}$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t), \max N_*(t) < J$ зависит от стохастических временных факторов. Согласно (2) популяция гарантированно погибает при увеличении репродуктивного потенциала r . Можно показать, что существует $r = \bar{r}$, что для события $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$ вероятность $P > 0$ и $\exists \hat{r} > \bar{r}, t < \infty$ реализуется для данного события $P = 1$. \hat{r} критический порог репродуктивной активности.

Разработанная нами модель (2) описывает сценарий борьбы иммунной системы с инфекцией, способной стать хронической при $N(t) \ll J$. Иммунный ответ имеет не полностью предопределенный характер из-за недетерминированной длительности иммунной активации. Варьируются время презентации антигена и длительность подбора подходящих лимфоцитов.

Работа выполнена при финансовой поддержке **РНФ, проект 23 – 21 – 00339**.

Литература

1. Переварюха А. Ю. *Моделирование инвазий со стохастически возмущенным запаздыванием* // Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т. 68. № 1. С. 182–183.
2. Переварюха А. Ю. *Запаздывание в регуляции популяционной динамики - модель клеточного автомата* // Динамические системы. 2017. № 2. С. 157–165.

**МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ,
УЧИТЫВАЮЩИЕ НЕЙТРАЛЬНЫЙ ПО ХИКСУ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС**

А.Ф. Проневич

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t), \tag{1}$$

где y — выпуск продукции, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор затрат производственных ресурсов, t — параметр времени из полуоткрытого числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция f является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.

Цель данной работы — предложить концепцию нейтральности по Хиксу в многофакторном случае (для случая $n = 2$ см., например, [1, с. 121–122; 2 – 4]) и установить аналитические виды динамических многофакторных ПФ, учитывающих нейтральность по Хиксу НТП. Способ построения динамических ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Статья продолжает исследования [3 – 6] по изучению аналитических форм динамических ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками [7, с. 47–77]: средние и предельные производительности факторов производства, эластичности по факторам производства, предельная норма технического замещения, эластичность замещения.

Будем говорить, что НТП является *нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* x_i и x_j , $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, $k \leq n$, если предельная норма технического замещения $MRTS_{ij}(f)$ фактора производства x_i фактором x_j не изменяется с течением времени при фиксированном отношении рассматриваемых факторов производства, т.е.

$$MRTS_{ij}(f) = \frac{\partial_{x_i} f(x, t)}{\partial_{x_j} f(x, t)} = \text{const} \quad \text{при} \quad \frac{x_j}{x_i} = \text{const}. \tag{2}$$

Если условие нейтральности (2) выполняется при всех индексах $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, $k \leq n$, то скажем, что НТП является *нейтральным по Хиксу относительно факторов производства* x_1, \dots, x_k , а при $k = n$ — просто *нейтральным по Хиксу*.

Основные результаты работы выражают следующие утверждения.

Теорема 1. *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает нейтральность по Хиксу относительно факторов производства x_1, \dots, x_k , $k \leq n$, НТП тогда и только тогда, когда многофакторную ПФ (1) можно представить в одной из аналитических форм*

$$f_1(x, t) = \Phi(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k}, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$$

или

$$f_2(x, t) = \Phi(a_1 x_1^{1-\gamma} + \dots + a_k x_k^{1-\gamma}, x_{k+1}, \dots, x_n, t), \quad \alpha_i, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

где Φ — произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

Следствие 1. *Для того, чтобы динамическая многофакторная ПФ (1) учитывала нейтральность по Хиксу НТП необходимо и достаточно, чтобы она имела форму*

$$f_1(x, t) = \Phi(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}, t)$$

или

$$f_2(x, t) = \Phi(a_1 x_1^{1-\gamma} + \dots + a_n x_n^{1-\gamma}, t), \quad \alpha_i, a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Следствие 2. Однородная степени $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ПФ (1) учитывает нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена или в аналитической форме

$$f_1(x, t) = A(t) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

или

$$f_2(x, t) = A(t) (a_1 x_1^{1-\gamma} + \dots + a_n x_n^{1-\gamma})^{q/(1-\gamma)},$$

где числа $\alpha_i, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = q, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, а строго возрастающая функция A такая, что $A(0) = 1$ есть индекс НТП.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ «Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства» на 2021 – 2025 годы (НИР «Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг, No. ГР 20211753»).

Литература

1. Hicks J. R. *The theory of wages*. London: Macmillan, 1932.
2. Blackorby Ch., Lovell C. A. K., Thursby M. C. *Extended Hicks neutral technical change* // The Economic Journal. 1976. Vol. 35, No. 344. P. 845–852.
3. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение* // Белорусский экономический журнал. 2020. № 3. С. 87–105.
4. Проневич А. Ф. *Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу* // Вестник ЦЭМИ РАН. 2020. № 3. С. 4–27.
5. Проневич А. Ф. Хацкевич Г. А. *Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс* // Вестник ин-та экономики НАН Беларуси. 2022. Вып. 4. С. 9–27.
6. Проневич А. Ф. *О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс* // Экономика и математические методы. 2023. Т. 59. № 1. С. 23–28.
7. Клейнер Г. Б. *Производственные функции: теория, методы, применение*. М.: Финансы и статистика, 1986.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕТЕВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЛ-ЦЕНТРА

Т.В. Русилко, А.В. Паньков

Предметом математического исследования и моделирования в данной работе является колл-центр, который принимает входящие звонки, инициированные клиентами, нуждающимися в информационной поддержке. Естественной является ситуация, когда клиент колл-центра, получающий сигнал «занято», повторяет вызов до тех пор, пока не будет установлено требуемое соединение. В результате поток звонков, циркулирующих в колл-центре, состоит из потока первичных звонков и потока повторных вызовов. Кроме того, следует принимать во внимание поток нетерпеливых клиентов, которые считают,

что остаточное время ожидания слишком велико, и навсегда покидают очередь в режиме ожидания соединения. Упомянутые особенности поведения клиентов телефонных услуг подчеркивают необходимость их учета в модели, что можно реализовать с помощью применения моделей массового обслуживания.

Целью данной работы является математическое моделирование колл-центра и анализ эффективности обработки вызовов с использованием замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания с повторными вызовами и нетерпеливыми заявками. Важнейшей задачей является асимптотический анализ сетевой модели, предполагающий приближенный метод исследования сети массового обслуживания при критическом допущении большого, но ограниченного числа заявок K в сети. Состояние модели в некоторый момент времени описывается совокупностью $n + 2$ случайных функций $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, n + 2}$, т. е. случайным процессом в $(n + 2)$ -мерном пространстве

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{n+1}(t), \xi_{n+2}(t)) = \left(\frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, \dots, \frac{k_{n+1}(t)}{K}, \frac{k_{n+2}(t)}{K} \right).$$

Здесь $k_{n+2}(t)$ – это число заявок на орбите, представляющей собой виртуальный зал ожидания для клиентов, осуществляющих повторный дозвон, $k_{n+1}(t)$ – число заявок, обслуживаемых автоматическим коммутатором распределения вызовов, $k_i(t)$ – число заявок, обслуживаемых операторами i -й специализации, $i = \overline{1, n}$, K – общее число заявок в замкнутой сети.

Законы и параметры обслуживания заявок в системах сети заданы таким образом, что исследуемая модель представляет собой экспоненциальную сеть массового обслуживания. Доказано, что в асимптотическом случае большого числа заявок K процесс $\xi(t)$ – непрерывный марковский случайный процесс, плотность распределения вероятностей которого удовлетворяет многомерному уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова, принадлежащему к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа [1–5]

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x, t)p(x, t)) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{n+2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B_{ij}(x, t)p(x, t)), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x_{n+2})$, в общем случае $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\varepsilon = K^{-1}$; $A(x, t) = (A_i(x, t))_{n+2}$ – векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса, $B(x, t) = (B_{ij}(x, t))_{(n+2) \times (n+2)}$ – матричная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения дисперсии рассматриваемого случайного процесса. Коэффициенты сноса $A_i(x, t)$ и диффузии $B_{ij}(x, t)$, $i, j = \overline{1, n + 2}$, зависят от параметров функционирования сети массового обслуживания, их вид не приводится из-за громоздкости выражений.

Решить уравнение (1) в многомерном случае не представляется возможным. Однако, используя методику, описанную в работах [3, 5], и выражения для коэффициентов сноса, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для среднего числа заявок в каждой из систем массового обслуживания

$$\frac{dM_{k_i}(t)}{dt} = K A_i(K^{-1}M_{k_i}(t), t), \quad k = \overline{1, n + 2}. \quad (2)$$

Решение (2) при определенном начальном условии позволяет прогнозировать $M_{k_i}(t)$ – среднее число звонков клиентов колл-центра на каждой стадии обслуживания

с течением времени t , $i = \overline{1, n+2}$. Найденные средние можно использовать для расчета других важных вероятностно-временных характеристик функционирования колл-центра, а также для постановки различных задач оптимизации и анализа производительности колл-центра.

Литература

1. Матальцкий М. А., Романюк Т. В. *Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения*. Гродно: ГрГУ, 2003.
2. Медведев Г. А. *Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 199–203.
3. Русилко Т. В. *Метод определения моментов первых двух порядков для вектора состояния сети массового обслуживания в асимптотическом случае* // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 2. С. 152–161.
4. Rusilko T. V. *Application of queueing network models in insurance* // Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022. Vol. 22. № 3. P. 315–321.
5. Rusilko T. V. *Asymptotic analysis of a closed G-network of unreliable nodes* // Journal of applied mathematics and computational mechanics. 2022. Vol. 21. № 2. P. 91–102.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т.Л. Сабатулина

Биология, в особенности исследования динамики популяций, была и остаётся источником математических задач. При этом особое внимание всегда уделялось задачам, требующим прогнозировать развитие популяции на достаточном большом временном промежутке.

Если биологическая система существует в неизменном виде достаточно долгое время, то она обладает способностью противостоять возмущениям со стороны окружающей среды. Эту способность системы естественно назвать устойчивостью. Описать границы области устойчивости — значит указать те условия существования системы, выход за которые может привести к её разрушению. Чтобы их описание было содержательным, оно должно быть количественным, то есть математическим. Кроме того, изучение многих биологических процессов в принципе невозможно иными методами, кроме построения адекватной математической модели: в живой природе опасны эксперименты с необратимыми (или непредсказуемыми) последствиями, а наблюдение за развитием живых организмов на небольшом промежутке времени не всегда даёт основания для надёжной экстраполяции.

Для математического моделирования динамически развивающихся систем используется производная (имеющая значение скорости изменения изучаемого объекта), а значит, дифференциальные уравнения и системы. Довольно долго исследователи динамики популяций ограничивались моделями, представляющими собой обыкновенные дифференциальные уравнения (напр., модель Мальтуса, логистическое уравнение, модель Лотки — Вольтерры). Такие модели характеризуются предположением, что скорость изменения изучаемого объекта (численности популяции) в любой момент времени зависит только от состояния объекта в тот же момент времени. Однако желание описать процесс точнее привело к тому, что эта гипотеза стала заменяться более гибкой: скорость изменения

объекта зависит не только от его состояния в данный момент времени, но и от «предыстории», то есть от состояний в некоторые предыдущие моменты времени. Такое предположение привело к новым классам моделей: наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями стали использоваться уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные уравнения и другие виды функционально-дифференциальных уравнений.

Учёт запаздывания позволил описывать динамику популяций более глубоко и полно: вслед за известной моделью Хатчинсона (1948 г.) [1] появились модели Ласоты — Важевски (1976 г.) [2], Мэкки — Гласса (1977 г.) [3], Николсона (1980–1983 гг.) [4]. Модель Хатчинсона описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов, модель Николсона — популяцию лабораторных мух, модели Ласоты — Важевски и Мэкки — Гласса — процессы кроветворения.

Устойчивость численности популяции, то есть способность популяции возвращаться к равновесному состоянию, математически описывается как устойчивость решений выбранного в качестве модели уравнения. Математические определения устойчивости даются в рамках теории дифференциальных уравнений соответствующего класса. Все перечисленные модели динамики популяций являются нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями. Исследование асимптотических свойств их решений в большинстве случаев проводится по следующей схеме: изучаются свойства линейного приближения (как можно точнее) и на их основе делаются выводы о поведении решения нелинейного уравнения. Если исходная модель учитывала эффект последствия, то его линейное приближение попадает в класс линейных функционально-дифференциальных уравнений. Поэтому с прикладной точки зрения наиболее интересными являются результаты, дающие эффективное (и возможно более точное) описание области устойчивости конкретных классов таких уравнений.

Развитие идеи запаздывания привело к возникновению моделей, в которых последствие учитывается более тонко: вместо одного запаздывания появилось несколько, запаздывание и коэффициенты начали зависеть от времени, наконец, наряду с сосредоточенным стали рассматривать распределённое запаздывание.

Однако даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает моделируемый процесс, на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи некоторого среднего значения. В этом случае использование распределённого запаздывания позволяет учитывать вероятностные эффекты в моделях, которые в противном случае были бы детерминированными.

На сегодня количество работ, в которых исследуется устойчивость биологических моделей, использующих уравнения с сосредоточенным запаздыванием, стало настолько большим, что требуются обзорные статьи, в которых результаты систематизируются и упорядочиваются (см. например, обзор [5] об уравнении Николсона). С другой стороны, модели с распределённым запаздыванием признаются столь же содержательными, но оказывается, что для них признаков устойчивости мало, а те, что получаются как следствие из теорем общего вида, далеки от точных.

В данной работе рассматривается несколько примеров биологических моделей, при составлении которых оказывается существенным эффект последствия. Наибольшее внимание уделяется моделям, в которых последствие считается распределённым по некоторому промежутку. Изучаются асимптотические свойства решений данных уравнений.

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

Литература

1. Hutchinson G.E. *Circular causal in ecology* // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.
2. Ważewska-Czyżewska M., Lasota A. *Mathematical problems of dynamics of red blood cells production* // Mat. Stos. 1976. V. 3. № 6. P. 23–40.
3. Mackey M., Glass L. *Oscillations and chaos in physiological control systems* // Science. 1977. V. 197. P. 287–289.
4. Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M. *Nicholson's blowflies revisited* // Nature. 1980. № 287. P. 17–21.
5. Berezansky L., Braverman E., Idels L. *Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems* // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. № 6. P. 1405–1417.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М.А. Скворцова

Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = rx(t - \tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t), y(t)), \\ \frac{d}{dt}u(t) = rx(t) - rx(t - \tau_1)e^{-c_1\tau_1} - c_1u(t), \\ \frac{d}{dt}y(t) = nf(x(t - \tau_2), y(t - \tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t), \\ \frac{d}{dt}v(t) = nf(x(t), y(t)) - nf(x(t - \tau_2), y(t - \tau_2))e^{-c_2\tau_2} - c_2v(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$f(x, y) = \frac{bxy}{1 + k_1x + k_2y}, \quad b > 0, \quad k_1, k_2 \geq 0.$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции взрослых жертв, $u(t)$ — численность популяции молодых жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $v(t)$ — численность популяции молодых хищников. Параметры запаздывания $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ отвечают за время взросления жертв и хищников соответственно. Коэффициенты системы предполагаются положительными.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1), соответствующих трем случаям: полному вымиранию популяций, вымиранию только популяции хищников, совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Приведены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Указаны оценки на области притяжения положений равновесия. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. При получении результатов использовались функционалы Ляпунова – Красовского специального вида [2].

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. You H., Yuan R. *A stage-structured predator-prey model with two delays due to juvenile maturation* // Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series. 2011. P. 1–20.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5. № 3. С. 20–28.

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДОХОДОВ НМ-СЕТИ С ОГРАНИЧЕННЫМ
ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ РАЗНОТИПНЫХ ЗАЯВОК И
НЕНАДЕЖНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ**

С.Э. Статкевич

Использование на практике сетей массового обслуживания (МО) довольно широко. Они применяются при моделировании объектов беспроводной локальной сети, различных систем документооборота, информационно-телекоммуникационных систем и сетей и др. В работах [1,2], в частности, показано, что из себя представляют системы МО и заявки. Описываются и другие элементы сетей МО.

НМ-сети с доходами являются расширением понятия сетей МО. В таких сетях заявка при переходе из одной системы массового обслуживания (СМО) в другую приносит последней некоторый доход, а доход первой СМО соответственно уменьшается на эту величину. Результаты исследования НМ-сетей с похожими особенностями представлены в работах [3,4].

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с разнотипными заявками, которая состоит из n СМО S_1, \dots, S_n . В сеть поступает простейший поток заявок из внешней среды (системы S_0) с интенсивностью λ . Заявки подразделены на r типов. Пусть m_i – количество линий обслуживания в i -й СМО, $i = \overline{1, n}$. Если поступившая в S_i заявка типа c находит хотя бы одну исправную линию обслуживания свободной от других заявок, то она немедленно начинает обслуживаться, $c = \overline{1, r}$. Время обслуживания является показательной случайной величиной со средним μ_{ic}^{-1} . Через p_{icjs} обозначим вероятность того, что заявка типа c после обслуживания в системе S_i поступит в систему S_j как заявка типа s (тем самым предполагаем, что при переходе между системами сети заявки могут менять свой тип.), $i, j = \overline{0, n}$, $c, s = \overline{1, r}$.

Длительность пребывания заявки типа c в очереди системы S_i также является показательной случайной величиной со средним θ_{ic}^{-1} , $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r}$, и не зависит от других факторов, например от времени пребывания в очереди других заявок. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в систему S_j с вероятностью q_{icjs} . Матрицы $P = \|p_{icjs}\|_{(n+1) \times n}$ и $Q = \|q_{icjs}\|_{n \times (n+1)}$, $c = \overline{1, r}$, являются матрицами переходов неприводимых марковских цепей.

Считаем, что линии обслуживания системы S_0 абсолютно надежны, а в других системах сети могут подвергаться случайным поломкам. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться. Время восстановления имеет показательную функцию распределения с параметром γ_i , $i = \overline{1, n}$.

В результате получены неоднородные ОДУ, позволяющие прогнозировать ожидаемый доход i -й системы МО в которой циркулируют разнотипные заявки

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = - \left(\sum_{c,s=1}^r \mu_{ic} \min(N_{ic}(t), \bar{d}_i(t)) \sum_{\substack{j=0 \\ (j \neq i)}}^n b_{icjs} p_{icjs} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{c,s=1}^r \theta_{ic} \min(N_{ic}(t), \bar{d}_i(t)) \sum_{\substack{j=0 \\ (j \neq i)}}^n \bar{H}_{icjs} q_{icjs} \Big) - \\
& - \gamma_i h_i (m_i - \bar{d}_i(t)) + \lambda \sum_{c=1}^r a_{0cic} p_{0cic} + c_i, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

где $N_{ic}(t)$ – среднее количество заявок типа c (в очереди и на обслуживании) в системе S_i в момент времени t ; $\bar{d}_i(t)$ – среднее число исправных линий обслуживания с системе S_i в момент времени t , $0 \leq \bar{d}_i(t) \leq m_i$; b_{icjs} – математическое ожидание случайного дохода, получаемого системой S_i в случае, когда заявка, получив обслуживание в этой системе, переходит на обслуживание в систему S_j как заявка типа c ; \bar{H}_{icjs} – математическое ожидание случайного дохода, получаемого системой S_i в случае, когда заявка, не дождалась обслуживания и переходит на обслуживание в систему S_j как заявка типа s ; h_i – математическое ожидание случайных затрат, связанных с восстановлением неисправной линии обслуживания в системе S_i ; a_{0cic} – математическое ожидание случайного дохода, который получает система S_i , в случае, когда заявка типа c поступает из внешней среды на обслуживание в эту систему; c_i – математическое ожидание дохода, получаемого системой S_i за счет процентов на денежные средства находящихся в ней, $i, j = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r}$.

Литература

1. Матальцкий М. А., Статкевич С. Э. *Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: моногр.* Гродно.: ГрГУ, 2014.
2. Матальцкий М. А., Науменко В. В. *Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: моногр.* Гродно: ГрГУ, 2016.
3. Статкевич С. Э., Матальцкий М. А. *Об одном методе исследования НМ-сетей с ограниченным временем ожидания заявок* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2010. Т. 92. № 1. С. 13–119.
4. Статкевич С. Э. *Об одном методе исследования НМ-сетей с ненадежными системами обслуживания* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2011. Т. 111. № 2. С. 89–105.

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ, ИНТЕРАКТИВНЫЕ СРЕДСТВА АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДИНАМИКИ НИЗОВЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

В.Б.Таранчук, Д.В.Баровик

На земном шаре существуют целые регионы, в которых лесные пожары происходят с регулярной периодичностью, и при этом не фиксируется успешность в их предотвращении и тушении. Требуются новые технические решения, более эффективные методы организации и управления работами. Наиболее сложным при этом является этап ликвидации чрезвычайных ситуаций, когда для принятия оптимальных управленческих решений принципиально важно иметь достоверные прогнозы распространения фронта горения, в том числе, оценки затрат и последствий при альтернативных вариантах действий. В правильных экспертных решениях обязательны учет конкретной обстановки, состава и состояния растительности, рельефа территории, истории и текущих погодных условий, множества других факторов. Понятно, что анализировать громадный объем

информации в очень сжатые сроки затруднительно без использования информационных технологий, а проигрывать сценарии с оценками разных вариантов действий без моделей развития процессов вовсе невозможно. Выход – использовать созданные, проверенные компьютерные модели.

Разработки математических моделей лесных пожаров начались с середины прошлого века в США и активно продолжаются во всем мире в настоящее время, текущее состояние, основные публикации, обзоры упомянуты в [1]. К сожалению, в обзорах научных публикаций наряду с определенными достижениями отмечаются ряд нерешенных вопросов, основные из которых следующие: недостаточная обоснованность принимаемых в моделях уравнений и входящих в них коэффициентов для описаний кинетики физико-химических превращений и реакций; сложность выбора адекватных моделей турбулентности в газовой фазе; незначительное число аналитических решений подобных задач, которые обязательны при оценках точности получаемых приближенных решений; отсутствие масштабных натуральных экспериментов, которые можно принять за эталон для верификации моделей.

Наблюдается пробел между слишком упрощенными моделями, дающими прогнозы с неприемлемой для достоверных оценок погрешностью, и моделями с таким чрезмерным количеством параметров, когда разработка даже относительно быстродействующих численных методов и алгоритмов их реализации становится самостоятельной проблемой [2].

В большинстве приведенных в литературе компьютерных моделей процесс распространения лесных пожаров анализируется только в однородных средах, хотя в реальности однородное распределение лесных горючих материалов (мхов, опада, трав, кустарников, деревьев и т.п.) встречается крайне редко. При этом известно, что многие наблюдаемые эффекты протекания лесных пожаров вызваны именно неоднородностью. Например, ускоренное распространение огня вдоль просек.

Выполненные в данном исследовании вычислительные эксперименты, предложенные и использованные методы обработки и визуализации результатов позволили выявить и в докладе будут предметом обсуждения особенности распространения лесных пожаров при наличии неоднородностей в плотности лесного горючего материала, в частности, когда на площади имитируются поляны различных форм и размеров. Отдельно и специально рассмотрены результаты попыток обнаружить эффекты в распределении цифровых полей температуры, а также «течений» (перепадов) концентраций кислорода, вызванных именно неоднородностями размещения на площади горючей растительности, в том числе с учетом влияния направления и силы ветра.

Ввиду ограниченности объема тезисов, но для общего понимания сложности принятого математического описания (двумерная с осреднением по высоте полога леса математическая модель распространения лесных пожаров) и соответствующей компьютерной модели, ниже приведены уравнения краевой задачи для определения распределений по площади и эволюции (динамики по времени) следующих величин: T – температура (в Кельвинах) лесного массива как сплошной многофазной реагирующей среды; φ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, – объемные доли компонент лесного горючего материала (ЛГМ), где через φ_1 обозначено сухое органическое вещество ЛГМ, φ_2 – содержащаяся в древесине (растительности) вода в связанной и свободной формах, φ_3 – коксик (древесный уголь), являющийся продуктом пиролиза ЛГМ в условиях недостатка кислорода, φ_4 – зола, негорючая минеральная часть ЛГМ; c_ν , $\nu = 1, 2, 3$, – массовые концентрации компонентов газовой фазы, где c_1 – кислород, c_2 – горючие газы, возникающие в процессе термического разложения, c_3 – смесь остальных негорючих газов, включая водяной пар, как

результат сушки; углекислый газ, выделяющийся при догорании коксика и окислении горючих газов; инертные компоненты воздушной смеси и продуктов реакций пиролиза и горения (полное описание, начальные и краевые условия приведены в [3, 4]):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Phi_{\varphi_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \Phi_{\varphi_2}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \Phi_{\varphi_3}, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_\nu}{\partial t} + (V, \text{grad} c_\nu) - \frac{1}{\rho_5} \text{div}(\rho_5 D_T \text{grad} c_\nu) = \Phi_{c_\nu}, \quad n\nu = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_5 c_{p5} (V, \text{grad} T) - \text{div}(\lambda_T \text{grad} T)}{\rho_5 c_{p5} + \sum_{j=1}^4 \rho_j \varphi_j c_{pj}} = \Phi_T. \quad (3)$$

Отметим, что записанные уравнения нелинейные, входящие функции зависят от T , c_ν , φ_j ; все учитываемые в модели величины подробно описаны в [2-5].

Система дифференциальных уравнений модели решалась численно. Применялись явные разностные схемы с равномерной сеткой по пространству и переменным временным шагом по времени. Текущие значения временного шага уточнялись из условий устойчивости численной схемы [2], с учетом динамики фронта и скоростей протекания физико-химических процессов. Вычислительные эксперименты реализованы в многофункциональном интерактивном программном комплексе, разработанном на языке Wolfram Language в системе компьютерной алгебры Mathematica [3]. Важными моментами организации вычислений являются: используемый дополнительный инструментарий, обеспечивающий интеллектуальный анализ получаемых решений; включенные в комплекс специальные средства протоколирования результатов; инструменты «ручной» коррекции параметров расчетной сетки; набор функций когнитивной графической визуализации; возможности пересчета для любого временного интервала на другой пространственной сетке. Соответствующие методические и технические решения поясняются отдельно. Необходимость адаптации хода вычислений (включая пространственную сетку, временной шаг) обусловлена длительностью расчетов каждого конкретного варианта, а «вмешательство» анализирующего промежуточные результаты специалиста, его выполняемые специально разработанными средствами уточнения числа расчетных узлов позволяют сократить ненужные пересчеты на отдельных участках.

Демонстрируются результаты развития лесного пожара при наличии в лесном массиве полян и водных преград различных форм, размеров и расположения, а также с учетом различной силы и направления ветра [3, 5].

Литература

1. Баровик Д.В., Таранчук В.Б. *Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров* // Вестник БГУ, серия 1. 2011. 3. С. 78-84.
2. Баровик Д.В., Корзюк В.И., Таранчук В.Б. *К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров* // Труды института математики. 2013. 21(1). С. 3-14.
3. Barovik D.V., Taranchuk V.B. *Tools for the analysis and visualisation of distributions and vector fields in surface forest fires modelling* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022. (2), P. 82-93.
4. Barovik D., Taranchuk V. *Mathematical modelling of running crown forest fires* // Mathematical Modelling and Analysis. 2010. 15 (2). P.161-174.
5. Баровик Д.В., Таранчук В.Б. *Компьютерная модель, примеры анализа влияния ландшафтно-метеорологических факторов на динамику низовых лесных пожаров* // Экономика. Информатика. 2020. 47(3). С. 610-622.

УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА–ПУАССОНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ КОСМОЛОГИИ

Н.Н. Фимин, В.М. Чечеткин

В работах авторов [1]–[3] рассмотрено описание неравновесной динамики статистического ансамбля гравитационно взаимодействующих $N (\gg 1)$ частиц с помощью системы уравнений Власова–Пуассона (в условиях применимости нерелятивистского формализма одночастичных функций распределения $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$). Мы будем полагать, что система частиц находится в состоянии, близком условно–равновесному, для которого уравнение Власова допускает “энергетическую подстановку” для функции распределения $F_1^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Omega(\varepsilon)$ ($\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2 + \Phi(\mathbf{x})$), а решение нелинейного уравнения Пуассона (уравнения Лиувилля–Гельфанда) относится к классу “минимальных” [4], устойчивых вблизи как регулярных, так и особых точек области изменения параметров.

Произведем линеаризацию решения в форме $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_1^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $|F_0| \gg |f|$. Подставив это выражение в уравнение Власова, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = m^{-1} \frac{\partial F_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int \int \mathfrak{Y}_d^{(\vartheta)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' d\mathbf{x}', \quad d = 2, 3.$$

Используя обращение оператора полной производной, приходим к форме уравнения Власова в представлении сдвигов по траекториям

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}, t_0) + \int_{t_0}^t dt' \tilde{B} \nabla_{\mathbf{v}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T} - \frac{1}{T} \Phi_-(t - t')\right) \cdot \hat{\mathcal{K}}_d^{(-)}[\vartheta] \varrho, \quad \Phi_-(t - t') \equiv \Phi_{min}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t')),$$

$$\hat{\mathcal{K}}_d^{(-)}[\vartheta] \varrho \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int \mathfrak{Y}_d^{(\vartheta)}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}(t - t')|) \varrho(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}', \quad \tilde{B} = N\rho_0/m.$$

Здесь $\varrho(\mathbf{x}', t') \equiv \int f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d\mathbf{v}'$. Решение $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ будем искать в форме интегралов типа Фурье–Лапласа от пространственных гармонических волн с убывающей амплитудой: $\int_{\mathbb{R}^3} f_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}, t) \exp(i\mathbf{w}\mathbf{x}) d\mathbf{w}$, где $\mathbf{w} = (w_\ell)_{\ell=1,2,3}^T$, $w_\ell = w_\ell^{(Re)} + iw_\ell^{(Im)}$. Для фурье–образов плотности $\varrho_{\mathbf{w}}$ справедливо следующее интегральное уравнение Вольтерра II-го рода

$$\varrho_{\mathbf{w}}(t) = {}^{[1]}\mathcal{D} f_{\mathbf{w}}(t) + \int_{t_0}^t {}^{[2]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}(t - t') \varrho_{\mathbf{w}}(t') dt'.$$

Решение уравнения данного типа может быть получено в терминах одностороннего преобразования Лапласа (по временной переменной)

$$\hat{\mathcal{L}} f_{\mathbf{w}}(\omega) = \int_0^\infty f_{\mathbf{w}}(t) \exp(-\omega t) dt, \quad f_{\mathbf{w}}(t) = Heav(t) (2\pi i)^{-1} \int_{\zeta_0+i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \hat{\mathcal{L}} f_{\mathbf{w}}(\omega) \exp(\omega t) d\omega,$$

$$\varrho_{\mathbf{w}}(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\zeta_0-i\infty}^{\zeta_0+i\infty} \exp(\omega t) \frac{\hat{\mathcal{L}}({}^{[1]}\mathcal{D} f_{\mathbf{w}})(\omega)}{1 - \hat{\mathcal{L}}({}^{[2]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}})(\omega)} d\omega, \quad \hat{\mathcal{L}}({}^{[k]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}})(\omega) = \int_0^\infty \exp(-\omega t) {}^{[k]}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}(t) dt.$$

Интеграл берется в правой полуплоскости комплексной плоскости $\omega = -\zeta - i\infty$ вдоль прямой, параллельной оси $\Re(\omega) = 0$. Полюсы подынтегрального выражения определяются уравнением $\widehat{\mathcal{L}}^{([2]D_{\mathbf{w}})} = 1$, которое приводится к форме (для $\Re(\omega) > 0$)

$$\gamma \mathcal{H}(w_\ell^{Re}, w_\ell^{Im}) \int_{\mathbb{R}^{\neq}} \frac{i\mathbf{w}\nabla_{\mathbf{v}}F_0}{\omega + i\mathbf{w}\mathbf{v}} = -1.$$

В предельных случаях зависимость $\omega = \omega(\mathbf{w})$ достаточно легко определить. Для малых значений величин модуля “волнового вектора” можно разложить в ряд Тейлора по $|\mathbf{w}|$ множитель в подынтегральном выражении ($\omega/(\omega + i\mathbf{w}\mathbf{v}) \approx \mathbf{w}/\omega - i\mathbf{w}\mathbf{v}^2/\omega^2$), и выбрать систему координат с осью абсцисс, сонаправленной вектору \mathbf{w} (для получения скалярной зависимости). Тогда:

$$\gamma \mathcal{H}(\mathbf{w}) \frac{\mathbf{w}^2}{\omega^2} \int \left[BT^{-1}(-mv_1 + \Phi'_{min} \cdot (t - t')) \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2T} - \frac{\Phi_-(t - t')}{T}\right) \right]_3 dv_1 = 1.$$

Таким образом, мы получаем приближенное дисперсионное соотношение (интегральное по времени), которое кратко можно записать как $\omega^2 = \gamma \mathbf{w}^2 \mathcal{H}(\mathbf{w}) \int [\dots]_3 dv_1$. Величина $\mathcal{H} > 0$, поэтому характер динамики системы зависит от знака выражения в скобках $[\dots]_3$: если $[\dots]_3 < 0$, то $\omega \in \mathbb{C}$ (чисто мнимое число), в обратном случае ω вещественное. Это означает, что возмущение в нашей исследуемой системе, качественно следующее закону $\sim \exp(\omega t + i\mathbf{w}\mathbf{v})$, будет иметь колебательный характер по времени, если система, находящаяся в окрестности состояния условного равновесия, подвергнута в начальный момент времени возмущению с большой длиной волны и критерий выполнен для мнимых ω ; для вещественных частот первичное возмущение затухающее или растущее (неустойчивое) в зависимости от знака $\omega \lesseqgtr 0$. Кроме этого, подынтегральное выражение может менять знак, переходя от осцилляторного поведения системы к оскулляторному.

Итак, мы получили зависимость $\omega(\mathbf{w})$ для системы массивных частиц с самогравитацией. Оно дает информацию о характере динамики системы (осцилляторный по времени и/или пространству с убывающей или сохраняющейся амплитудой, экспоненциально убывающий и неустойчивый). Чрезвычайно важным для астрофизического фона анализа дисперсионных решений является тот факт, что в данном случае нет необходимости рассматривать набор случайных флуктуаций в системе (которые при этом неким образом когерентно самоупорядочиваются на колоссальных расстояниях по одному или двум направлениям для формирования наблюдаемых космологических структур). В природу самой системы уравнений Власова–Пуассона имманентно заложен механизм возникновения псевдоосцилляторной (по времени и по выделенным направлениям пространства) реализации распределения материи.

Литература

1. Gurzadyan V. G. Fimin N. N., Chechetkin V. M. *Cosmic voids and the kinetic analysis* // Astronomy and Astrophysics. 2022. V. 666. № A149. P. 1–6.
2. Gurzadyan V. G. Fimin N. N., Chechetkin V. M. *On the origin of cosmic web* // Eur. Phys. J. Plus. 2022. V. 137. P. 132–138.
3. Vedenyapin V. V.; Fimin N. N.; Chechetkin V. M. *Equation of Vlasov-Maxwell-Einstein type and transition to a weakly relativistic approximation* // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. № 11. P. 1816–1831.
4. Dupaigne L. *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2011.

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ
ОБЛАСТЯХ**

М.М. Чуйко, О.М. Королёва

Рассмотрим уравнение теплопроводности, заданное в нерегулярной односвязной двумерной области Ω_{xy}

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega_{xy} \times [0, T], \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y) \quad (2)$$

и смешанными граничными условиями первого и второго рода

$$u(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1} = u_0(x, y, t), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \mu(x, y, t), \quad \Gamma_2 = \partial\Omega_{xy} - \Gamma_1, \quad (3)$$

где $\partial\Omega_{xy}$ – граница области Ω_{xy} , n – внешняя нормаль к границе.

При решении задач в сложных областях используются обобщенные криволинейные координаты [1]. Пусть преобразование $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ отображает область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$. В пространстве обобщенных криволинейных координат (ξ, η) задача (1) – (3) имеет следующий вид

$$|J^{-1}| \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + |J^{-1}| \tilde{f}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad (4)$$

$$u(\xi, \eta, 0) = \tilde{u}^0(\xi, \eta),$$

$$u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}_0(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{1,\xi\eta}, \quad (5)$$

$$B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = \text{const}, \quad (6)$$

$$B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = \text{const}, \quad (7)$$

где

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right), \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$|J^{-1}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Здесь $|J^{-1}|$ – якобиан обратного преобразования $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, B_{11}, B_{12}, B_{22} – метрические коэффициенты.

На дискретном уровне построение отображения Ω_{xy} в $\Omega_{\xi\eta}$ представляет собой генерацию регулярной (четырёхугольной) сетки $N \times M$ в области Ω_{xy} . На равномерной прямоугольной разностной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, введенной в области $\Omega_{\xi\eta} \times [0, T]$

$$\bar{\omega}_h = \{(\xi_i, \eta_j), \xi_i = ih_1, i = \overline{0, N}, \xi_N = 1, \eta_j = ih_2, j = \overline{0, M}, \eta_M = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t^n, t^n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, t_{N_0} = T\}$$

аппроксимируем (4) разностной схемой с весами

$$|J^{-1}|u_t = \left(\sum_{\alpha\beta}^2 \Lambda_{\alpha\beta} u + |J^{-1}| \tilde{f} \right)^{(\sigma)}.$$

Используем следующие монотонные аппроксимации второго порядка эллиптического оператора со смешанными производными [2]

$$\Lambda_{11}u = (\beta_{11}u_{\bar{\xi}})_{\xi}, \quad \Lambda_{22}u = (\beta_{22}u_{\bar{\eta}})_{\eta},$$

$$\Lambda_{12}u = \frac{1}{2} \left((\beta_{12}^- u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12}^- u_{\eta})_{\bar{\xi}} + (\beta_{12}^+ u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^+ u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}} \right),$$

$$\Lambda_{21}u = \frac{1}{2} \left((\beta_{21}^- u_{\bar{\xi}})_{\eta} + (\beta_{21}^- u_{\xi})_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}^+ u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+ u_{\bar{\xi}})_{\bar{\eta}} \right).$$

Метрические коэффициенты β_{kl} , $k, l = 1, 2$ определяются по координатам узлов $(x, y)_{ij}$ разностной сетки, построенной в области $\Omega_{\xi\eta}$ с использованием центральных разностей для аппроксимации соответствующих производных.

В граничных узлах $\Gamma_{1,\xi\eta}$ краевые условия аппроксимируются точно. Для повышения порядка аппроксимации краевых условий второго рода на границе $\Gamma_{2,\xi\eta}$ будем привлекать исходное дифференциальное уравнение. Аппроксимируем левую часть (7) на границе $\eta = 0$ следующим образом

$$\left(\beta_{21} \hat{u}_{\xi} + \beta_{22} \hat{u}_{\eta} \right)_{i,0} = \left(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{h_2}{2} B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)_{i,0}^{n+1} + O(h_1^2 + h_2^2). \quad (8)$$

Выражаем $B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ из уравнения (4), подставляем в (8) и аппроксимируем производные на границе $\eta = 0$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\beta_{21}^+ \hat{u}_{\bar{\xi},i,1/2} (\hat{u}_{\bar{\xi},i,1} + \hat{u}_{\xi,i,1}) + \beta_{21}^- \hat{u}_{\xi,i,1/2} (\hat{u}_{\xi,i,1} + \hat{u}_{\bar{\xi},i,1}) \right) + \beta_{22,i,1/2} \hat{u}_{\eta,i,0} + \\ & + \frac{h_2}{2} \left((\beta_{11,i-1/2,1} \hat{u}_{\bar{\xi}})_{\xi} + (\beta_{12}^+ \hat{u}_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12}^- \hat{u}_{\eta})_{\bar{\xi}} - \frac{|J^{-1}|}{\tau} \hat{u} \right)_{i,0} = \\ & = - \left(\mu g_{11}^{1/2} + \frac{h_2}{2} \frac{|J^{-1}|}{\tau} (u + \tau \tilde{f}) \right)_{i,0}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом строятся аппроксимации краевых условий второго рода для других участков границы $\Gamma_{2,\xi\eta}$.

Проведен ряд численных экспериментов. Полученные системы девятиточечных разностных уравнений решались с помощью метода MSIM [3]. Результаты численных экспериментов подтверждают второй порядок $O(\tau^2 + |h|^2)$ точности алгоритма решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Литература

1. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей*, т.2, М.: Мир, 1991.
2. Rybak I. *Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives*// Math. Model. Anal. 2004, V. 9, № 2. P. 169 – 178.
3. Schneider G., Zedan M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem* // Numer. Heat Transf. 1981. V. 4. P. 1–19.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВНУТРИ
БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭКРАНА В ПРИСУТСТВИИ
ТОРА**

Г.Ч. Шушкевич

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод интегральных уравнений. Однако актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы остаются, по-прежнему, основными средствами решения фундаментальных проблем, создают основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами. Метод разделения переменных, аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики [1,2]. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений, который позволяет свести решение поставленной граничной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, которое обычно не имеет аналитического решения в замкнутой форме, либо к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [3-5]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [6,7]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение поставленных задач в виде ряда по малому параметру для двух и более проводников, представляющих собой как полные, так и неполные координатные поверхности [8,9].

Пусть однородное, изотропное пространство R^3 с диэлектрической проницаемостью среды ε разделено бесконечным круговым цилиндрическим экраном Γ радиуса b на два полупространства D_1 и D_2 . В полупространстве D_1 на оси цилиндрического экрана Γ расположен тороидальный экран T с малым радиусом r и большим R .

В области D_1 на плоскости $z = -h$ находится заряженная нить, расположенная на окружности радиуса d . Полагаем, что заряд q равномерно распределен по окружности, тогда линейная плотность зарядов $\tau = q/2\pi d$. В результате взаимодействия первичного электростатического поля с экранами Γ и T образуется вторичное поле. Обозначим потенциал вторичного поля в области D_1 через U_1 , а исходного электростатического поля – U_0 .

Постановка задачи. Требуется найти вторичный потенциал U_1 , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U_1 = 0, \quad (1)$$

граничным условиям

$$(U_1(M) + U_0(M))|_{M \in T} = V - const, \quad (U_1(M) + U_0(M))|_{M \in \Gamma} = 0 \quad (2)$$

и условию на бесконечности

$$U_1(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где M – произвольная точка области D_1 .

Потенциал U_0 исходного электростатического поля можно представить через сферические гармонические функции [4]

$$U_0(r, \theta) = Q \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\ell}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > \ell,$$

где $Q = q/4\pi\epsilon\ell$, $a_n = (-1)^n P_n(\cos \theta_0)$, $\ell = \sqrt{h^2 + d^2}$, $\cos \theta_0 = h/\ell$, $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [2], физическая размерность коэффициента Q – [В](система единиц СИ).

Вторичный потенциал представим в виде суперпозиции цилиндрических и тороидальных гармонических функций

$$U_1 = U_t(\alpha, \beta) + U_c(\rho, z),$$

$$U_t(\alpha, \beta) = \sqrt{2(ch\alpha - \cos \beta)} Q \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) e^{in\beta},$$

$$U_c(\rho, z) = Q \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda) I_0(\lambda\rho) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

где $P_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha)$ – функция тора, $I_0(\lambda\rho)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [30].

Неизвестные коэффициенты X_n и функция $Z(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий (2),(3).

Используя соответствующие теоремы сложения, показано, что решение поставленной граничной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов, входящих в представление вторичного поля. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение электростатического потенциала внутри заземленного цилиндрического экрана в присутствии тороидального включения. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных электрофизических устройств, в котором возникает необходимость моделирования электростатического поля для заряженных тел различной конфигурации.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Ковергенция - 2025" (подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Pierrus J. *Solved Problems in Classical Electromagnetism: Analytical and Numerical Solutions with Comments*. Oxford: Oxford University Press, 2018.
2. Sharma J.N., Singh K. *Partial Differential Equations for Engineers and Scientist*. New Delhi: Narosa Publishing house, 2000.

3. Уфлянд Я. С. *Метод парных уравнений в задачах математической физики*. Ленинград: Наука, 1977.
4. Duffy D. G. *Mixed boundary value problems*. NW: Chapman & Hall/CRC, 2008.
5. Шушкевич Г. Ч. *Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки*. // Электричество. 2010. № 6. С. 63–68.
6. Ерофеев В. Т. *Задача электростатики для двух тороидальных проводников*. // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 8. С. 1641–1643.
7. Shushkevich G. Ch. *Electrostatic problem for a torus placed in an infinite cylinder*. // Technical Physics. 2004. Vol. 49, no 5. P. 540-544.
8. Шушкевич Г. Ч. *Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики*. Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.
9. Шушкевич Г. Ч. *Моделирование поля электростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости*. // Информатика. 2017. № 2. С. 14–23.

GEODESICS OF RIEMANNIAN METRICS RELATED TO THE NAVIE–STOKES EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Valery Dryuma

1. The $14D$ Riemann -metric in local coordinates $\vec{x} = [x, y, z, t, \eta, \rho, m, u, v, w, p, \xi, \chi, n]$

$$ds^2 = 2dx du + 2dy dv + 2dz dw + (-Uu - Vv - Ww) dt^2 + 2dt dp + \\ + Ad\eta^2 + 2d\eta d\xi + Bd\rho^2 + 2d\rho d\chi + Cdm^2 + 2dm dn,$$

where

$$A = (-UW + \mu U_x) w + (-UV + \mu U_y) v + (-U^2 - P + \mu U_x) u - Up, \\ B = (\mu V_z - VW)w + (-V^2 - P + \mu V_y) v + (-UV + \mu V_x) u - Vp, \\ C = (\mu W_z - (W^2 - P)w + (\mu W_y - VW)v, (-UW + \mu W_x)u - Wp,$$

(U, V, W) , P – the components of velocity and pressure of liquid, has the Ricci-tensor of the form $R_{44} = U_x + V_y + W_z = 0$, $R_{55} = 0$, $R_{66} = 0$, $R_{77} = 0$ on solutions of Navier-Stokes system of equations

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} - \mu \Delta \vec{V} + \vec{\nabla} P = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0.$$

It belongs to the class of Riemann extensions of affinely-connected spaces, are equipped by partially-projective metrics due the conditions to part of coordinates

$$\ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0, \quad \ddot{m}, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\chi} = 0, \quad \ddot{n} = 0$$

and the remaining geodesic equations have the form

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad \ddot{\Psi}_k + T_k^i \Psi_i = 0,$$

where $x = (x, y, z, t)$ -the Euler coordinates, $\Psi_k = (u, v, w, p)$ -the Lagrange coordinates.

2. The four-dimensional metric

$$ds^2 = (2za_3(x, y) - 2ta_4(x, y)) dx^2 + 2(2za_2(x, y) - 2ta_3(x, y)) dx dy + 2 dx dz + \\ + (2za_1(x, y) - 2ta_2(x, y)) dy^2 + 2 dy dt,$$

associated with the second order ODE's

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3a_2(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3a_3(x, y) \frac{dy}{dx} + a_4(x, y) = 0$$

with arbitrary coefficients $a_i(x, y)$ and the metric

$$ds^2 = y^2 dx^2 + 2(l(x, t)y^2 - 1/2) dx dt + 2 dy dt + \left((l(x, t))^2 y^2 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} l(x, t) \right) y + l(x, t) \right) dt^2$$

which Ricci-flat on solutions the KdV-equation

$$\frac{\partial}{\partial t} l(x, t) - 3l(x, t) \frac{\partial}{\partial x} l(x, t) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} l(x, t) = 0$$

together with the six-dimensional metric in local coordinates x, y, t, p, q, s

$$ds^2 = 4p \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) \right) dx dt + 2 dx dp + 4p \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) \right) dy dt + 2 dy dq + 2 dt ds + \\ + \left(-2pf(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) - 2p \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y, t) - 2\mu q \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) + 2s \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) \right) dt^2$$

which is the Ricci-flat $R_{ik} = 0$ on solutions of the KP-equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) \right)^2 + f(x, y, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f(x, y, t) + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y, t) = 0$$

may be of used to construct the examples of flows liquids, described by the NS -system of equations.

References

1. Dryuma V. S., Shabat A.B. at al *The Riemann and Einstein -Weyl geometries in the theory of ODE's , their applications and all that* // New Trends in Integrability and Partial Solvability. 2004. 115-156.
2. Dryuma V. S., *On spaces related to the Navier-Stokes equations* // Buletinul AS RM, Mathematica, IMI, Chisinau. 2010. V.3(64). P. 107-110.
3. Dryuma V. S., *The Ricci flat spaces spaces related to the Navier-Stokes equations* // Buletinul AS RM, Mathematica, IMI, Chisinau. 2012. V.2(64). P.99-192.
4. Dryuma V. S., *On spaces related to the Navier-Stokes equations* // Buletinul AS RM, Mathematica, IMI, Chisinau. 2010. V.2(64) P. 107-110.
5. Dryuma V. S., *Geometric approach to study the Navier-Stokes equations* // Proceedings of Mathematical center "Lobachevsky reading ICM'2022, Kazan, KFU. 2022. V.62. P.39-41.
6. Dryuma V. S., *On spaces of constant curvature* // 2006. V.146[1], P.42-54.
7. Dryuma V. S., *Duality and metrics in theory of a second order ODE's* // Proceedings of Conference CMSM4, IMI, Chisinau). 2017. P. 273-276.

GENERALIZATION OF THE ABRAMS-STROGATTI MODEL OF LANGUAGE DYNAMICS TO THE CASE OF SEVERAL LANGUAGES

A.V. Medvedev, O.A. Kuzenkov

Mathematical modeling is actively used to study language dynamics; many works are devoted to its research [1-7]. The study of language dynamics and the prediction of its results are very important due to the development of digital and telecommunication technologies, the global Internet [8]. The central problem is to find the trend when one language displaces the others, i.e. becomes the dominant, because by this it influences all spheres of social life.

The purpose of this work is to construct and study a generalized mathematical model of Abrams-Strogatti to describe the dynamics of several coexisting languages.

The following model is considered:

$$\dot{x}_i = \left(\sum_{j \neq i}^N x_j \right) c s_i x_i^\alpha - x_i c \left(\sum_{j \neq i}^N s_j x_j^\alpha \right), \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N s_i = 1, \quad \alpha > 1. \quad (1)$$

The phase variables $x_i, i = \overline{1, N}$, are the fraction of speakers of different languages. The parameter s_i is the prestige of the i -th language, the constant α is the volatility that is determined by the Abrams-Strogatti hypotheses [9]. The coefficient c is some constant. The space of states for (1) is the standard simplex [10].

The analytical research is based on the mathematical approach to study systems of differential equations on a standard simplex [10-14], which was used to model the transmission of genetically unfixed information. The language competitiveness function was obtained [15,16]:

$$J_i = c s_i x_i^{\alpha-1} (0).$$

The dominant language is the language for which the function of competitiveness has the greatest value. Competitiveness depends on the initial distribution of speakers in languages.

In this work, ten-year statistics has been analyzed (of the) on the use of the eight most popular languages on the Internet: English, Russian, German, Spanish, Chinese, Japanese, French and Turkish [8]. Based on this, the parameters of the model were identified. It has been shown that the English language displaces other languages from the global Internet over time, under persisting conditions.

References

1. Castelly, X. Eguhluz, V. San Miguel M. *Ordering Dynamics with Two Non-Excluding Options: Bilingualism in Language Competition* // New Journal of Physics. 2006. 8. 308.
2. Mira J., Paredes B. *Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics*. // EPL (Europhysics Letters). 2005. 69. 1031.
3. Baggs I., Freedman H. *A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction*. // J. Math. Sociol. 1990. 16(1). 51-75.
4. Wyburn J., Hayward J. *The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model*. // J. Math. Sociol. 2008. 32(4). 267-284.
5. Diaz M., Switkes J. *A mathematical model of language preservation*. // 2021. [<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8170493>]
6. Alexandrova N. *The disappearance of languages, natural bilingualism and nonlinear dynamics*. // In: 8th International Conference on Cognitive Science, Svetlogorsk, Russia. 2018. pp. 35-37.
7. Alexandrova N. Antonets V. Kuzenkov J. Nuidel I. Shemagina V. Yakhno V. *Bilingualism as an Unstable State* // 2021.
8. World Wide Web Technology Surveys *Most popular content languages for the period 2013-2023 years* [<https://w3techs.com>]
9. Abrams D. Strogatz S. *Modelling the Dynamics of Language Death*. // 2003. Nature. 424. 900.

10. Kuzenkov O. Ryabova E. *Optimal control of a hyperbolic system on a simplex* [https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13436426]

11. Kuzenkov O. *The investigation of the population dynamics control problems based on the generalized Kolmogorov model* [https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15304000]

12. Kuzenkov O. Ryabova E.. *Optimal control for a system on a unit simplex in infinite time* [https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13492582]

13. Kuzenkov O. Ryabova E. *Mathematical models of selection processes* // N.Novgorod: Nizhny Novgorod State University. 2010. P. 80-125.

14. Kuzenkov O. Ryabova E. *Variational Principle for Self-replicating Systems* // Math. Model. Nat. Phenom. 2015. V.10 (2) P. 115–129.

15. Kuzenkov O. *Construction of the fitness function depending on a set of competing strategies based on the analysis of population dynamics.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 30. Iss. 3. P. 276-298.

16. Kuzenkov O. Morozov A. *Towards the construction of a mathematically rigorous framework for the modelling of evolutionary fitness* // Bulletin of Mathematical Biology. 2019. Vol. 81. no. 11. P. 4675–4700. [https://doi.org/10.1007/s11538-019-00602-3]

METHODS FOR SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS IN THE THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

D. S. Zhalukevich

Consider a linear homogeneous differential equation with constant coefficients of degree n [1]

$$L(w) = 0, \quad (1)$$

where

$$L() = a_n \frac{d^n}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dz} + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

We will look for the solution of equation (1) in the form

$$w = Ae^{xz},$$

after substituting it into equation (1), we obtain an algebraic equation of degree n [2-4]:

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

which on the plane Oxy defines a certain graph of the function, and its solution is to find the intersection points of the graph of the function with the axis Ox or to find the zeros of the function.

We introduce the substitution of variables $x = \varphi(t)$, which, when substituted into equation (2), transforms our graph of the function $y = f(\varphi(t)) = g(t)$. Moving to a new two-dimensional space with coordinates t, y , we will look for the solution of equation (2) there.

We will choose the replacement of variables so that the equation in the new variables has a polynomial form

$$y = g(t) = \sum_{i=0}^k b_i t^i = 0, \quad b_k \neq 0. \quad (3)$$

In this paper, substitutions of the following type will be used:

1. Polynomial

$$x = \sum_{i=0}^m c_i t^i; \tag{4}$$

2. Lorana

$$x = \sum_{i=-m}^m c_i t^i; \tag{5}$$

3. Fractional-rational

$$x = \frac{\sum_{i=0}^m c_i t^i}{\sum_{i=0}^m d_i t^i}. \tag{6}$$

It can be seen from this that, for substitutions (4) and (5), the coefficients b_i of equation (3) depend on the coefficients a_i, c_i , and for substitution (6) on the coefficients a_i, c_i, d_i .

Theorem 1. *Coefficients of equation (3) for replacing variables*

$$x = c_0 + c_1 t, \tag{7}$$

they have the form

$$b_k = c_1^k \frac{f^{(k)}(c_0)}{k!}, \quad f^{(k)}(c_0) = \frac{d^k f(c_0)}{dc_0^k}. \tag{8}$$

If we put $c_0 = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$ in (7), then $b_{n-1} = 0$.

Theorem 2. *Coefficients of equation (3), where $g(t) = t^{-2n} \sum_{i=0}^k b_i t^i$ for replacing variables*

$$x = c_{-1} t^{-1} + c_0, \tag{9}$$

they have the form

$$b_k = c_{-1}^{n-k} \frac{f^{(n-k)}(c_0)}{(n-k)!}, \quad f^{(n-k)}(c_0) = \frac{d^{n-k} f(c_0)}{dc_0^{n-k}}. \tag{10}$$

If we put $c_0 = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$ in (9), then $b_1 = 0$.

References

1. Perko, L. *Diferential equations and dynamical systems* / L.Perko.-Springer-Verlag, 2001.-557 p. - (Texts in Applied Mathematics, Vol. 7).
2. Jean-Pierre Tignol. *Galois' Theory of Algebraic Equations*. Belgium, 2001.
3. David A. Cox *Galois Theory*. USA, 2012.
4. Stewart, Ian Nicholas. *Galois Theory*. USA, 2014.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ» С ЭЛЕМЕНТАМИ QR-КОДИРОВАНИЯ

Л.Л. Березкина, М.А. Глецевич, А.А. Егоров, Н.С. Магонь,
И.И. Рушнова, Н.К. Филиппова, Т.А. Чехменок

В соответствии с требованиями современного общества и научных достижений в последнее время при изложении математических дисциплин в высшей школе сохраняются тенденции сокращения количества часов и изложения материала в более сжатые сроки. В связи с этим актуален вопрос: как способствовать успешному освоению той или иной учебной дисциплины в рамках новой парадигмы? Очевидно, необходим перспективный инструмент-помощник, способный расширить информационное пространство современного образования для студентов. В нынешних условиях студентам достаточно комфортно работать с мобильными устройствами. Поэтому можно воспользоваться некоторыми преимуществами современной техники как на практических занятиях (с согласия преподавателя), так и в домашних условиях через простые и доступные в использовании технологии. Такими технологиями являются QR-коды.

QR-код — это двумерный штрих-код, состоящий из черных и белых пикселей и позволяющий кодировать до нескольких сотен символов. Не так давно он нашел применение в образовательном процессе. Так использование QR-кодов в учебниках и методических разработках придает интерактивность печатным изданиям и расширяет их содержание дополнительным материалом. Все большую популярность QR-кодирование приобретает и на практических занятиях по различным дисциплинам, поскольку становится хорошим подспорьем традиционным приемам изложения тем и дает возможность наглядно продемонстрировать теоретические выкладки. Кодированию подлежит любая информация, представляемая в различных форматах.

Для большего вовлечения обучающихся в образовательный процесс и усиления их мотивации на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета Белорусского государственного университета по дисциплинам высшей математики готовится цикл учебных пособий «Высшая математика в приложениях и задачах» нового поколения с элементами QR-кодирования. Уже в 2024 году выйдет в свет первая часть из четырех частей цикла, посвященная дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». Эта дисциплина читается на первом курсе физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий. Она является составным элементом математического аппарата ряда курсов общей физики, теоретической физики и специальных физических дисциплин. Также стоит отметить, что при изучении данной дисциплины студенты знакомятся с понятиями, без которых невозможно освоение современных и широко востребованных на практике и в фундаментальных исследованиях направлений компьютерных наук, таких как машинное обучение и наука о данных. Сохраняя должный уровень теоретических знаний и требований их применения студентами в практических и исследовательских целях, учебное пособие включает все темы

дисциплины, отраженные в действующих учебных программах [1–4]. В пособие включены традиционные разделы «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра». Каждая глава разбита на параграфы, в которых содержатся краткие теоретические сведения, снабженные обозначениями, важнейшими определениями, теоремами и формулами. В пособии сделан акцент на изложение алгоритмов и методов решения задач, а также на практические приложения. Оно содержит большое количество примеров и подробно разобранных задач, которые предназначены для разъяснения какого-либо аспекта или иллюстрации стандартного метода решения. В конце каждой главы приводится список заданий для самостоятельного решения. Отличительной особенностью пособия является наличие большого количества задач физического характера, что способствует более успешному усвоению не только математических, но и физических дисциплин.

QR-кодирование в пособии используется по ряду причин. Во-первых, некоторые подробные решения можно увидеть и услышать, воспользовавшись QR-кодом, что несомненно будет способствовать более успешному овладению материалом. Во-вторых, пройдя по QR-коду, можно обнаружить другой способ (или даже два) решения предложенной задачи. В-третьих, QR-кодирование позволяет более доступно изложить, например, такую тему, как «Линии и поверхности второго порядка», наполненную большим количеством построений трехмерных изображений. При этом, пройдя по QR-коду, можно не только ознакомиться с принципами таких построений, но и провести самостоятельное исследование путем изменения некоторых параметров поверхностей второго порядка. Внедрение QR-кодирования в данное пособие позволяет сделать изложение сложных тем увлекательным и интересным.

Учебное пособие «Высшая математика в приложениях и задачах» по своему уровню предназначено для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов. Книга будет полезна и студентам высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области компьютерных технологий, студентам специальностей, требующих хорошей математической подготовки, а также преподавателям высших учебных заведений. Само же QR-кодирование может стать инструментом для расширения кодирования различной учебной информации в дисциплинах по физике и математике.

Литература

1. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 03 07-02 Прикладная информатика (информационные технологии телекоммуникационных систем); 1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства). УД-10058/уч. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/272450>.

2. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 04 02 Радиофизика; 1-31 04 03 Физическая электроника; 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии. УД-10057/уч. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/272449>.

3. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность). УД-10132/уч. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/273442>.

4. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*. Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 04 01 Физика (по направлениям): направление специальности 1-31 04 01-01 Физика (научно-исследовательская деятельность); 1-31 04 06 Ядерная физика и технологии; 1-31 04 07 Физика наноматериалов и нанотехнологий. УД-10000/уч. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/271625>.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА БЕРНУЛЛИ

В.И. Булатов

Для последовательности

$$a_n = \frac{1 + nx}{(1 + x)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при любом фиксированном $x > -1$ имеем

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{nx^2}{(1+x)^{n+1}} \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, эта последовательность убывает и, поэтому, $\forall a_n \leq a_1 = 1$, т.е. $\frac{1+nx}{(1+x)^n} \leq 1$, что приводит к классическому неравенству Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

которое выполняется не только для $\forall x > -1$, но и для $x = -1$, т.е. для $\forall x \geq -1$.

Целью данной работы является обоснование функционального аналога неравенства (1) без использования исследования функций на монотонность, выпуклость и экстремум методами дифференциального исчисления.

Для этого нам понадобится следующая

Лемма [1]. При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ члены последовательности

$$b_n = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

возрастают, начиная с номера $n > -t$.

Доказательство. После соответствующих преобразований для $\forall n > -t$ имеем

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+t}{n} \left(1 - \frac{t}{(n+1)(n+t)}\right)^{n+1} \geq [\text{неравенство Бернулли}] \geq \frac{n+t}{n} \left(1 - \frac{(n+1)t}{(n+1)(n+t)}\right) = 1.$$

Отсюда, учитывая, что для $\forall n > -t$ следует $b_n > 0$, получаем $b_{n+1} \geq b_n, \forall n > -t$. Значит, все члены остатка рассматриваемой последовательности, начинающегося с номера $n > -t$, возрастают.

Следствие. Для $\forall t \in \mathbb{R}$ и $\forall k, m \in \mathbb{N}$, где $k \geq m > -t$, справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{t}{k}\right)^k \geq \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m. \quad (2)$$

Теорема. Для $\forall x \geq -1$ и $\forall \alpha \geq 1$ выполняется неравенство

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \quad (3)$$

являющееся функциональным аналогом неравенства Бернулли (1).

Доказательство. Заметим, что если $x \geq -1$ и $1+\alpha x \leq 0$, то неравенство (3) выполняется для $\forall \alpha \geq 1$ в силу того, что число в левой части этого неравенства неотрицательно, а в правой части неположительно. Пусть $1+\alpha x > 0$, где $\alpha \geq 1, \alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда $\exists k, m \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha = \frac{k}{m}, k \geq m$, причем $x > -\frac{1}{\alpha} = -\frac{m}{k} \geq -1$. Используя в (2) $t = kx$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $k \geq m > -t$, имеем

$$(1+x)^\alpha = \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{\frac{k}{m}} \geq [\text{неравенство (2)}] \geq 1 + \frac{t}{m} = 1 + \frac{k}{m}x = 1 + \alpha x.$$

Значит, при каждом фиксированном $x \geq -1$ неравенство (3) выполняется для произвольного рационального $\alpha \geq 1$. В общем случае когда $x \geq -1$ и $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 1$, выбирая, например, монотонно убывающую последовательность (α_n) рациональных десятичных приближений для α с избытком, т.е. $\alpha_n \in \mathbb{Q}, \alpha_n \geq \alpha \geq 1, \alpha_n \rightarrow \alpha$, после предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве $(1+x)^{\alpha_n} \geq 1 + \alpha_n x$, в силу непрерывности показательной и линейной функций, окончательно получим

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)^{\alpha_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n x) = 1 + \alpha x.$$

Замечание 1. Если $x > -1$ и $\alpha \leq 0$, то после использования $(-\frac{x}{1+x}) = -1 + \frac{1}{1+x} > -1$ в (3) вместо x и $(1-\alpha) \geq 1$ вместо α , имеем

$$\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{1-\alpha} \geq 1 - \frac{(1-\alpha)x}{1+x},$$

и, значит $(1+x)^{\alpha-1} \geq \frac{1+\alpha x}{1+x}$, что опять приводит к неравенству (3). Поэтому, при $x > -1$ функциональный аналог (3) неравенства Бернулли выполняется для $\forall \alpha \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$. Отсюда, в частности, следует, что классическое неравенство Бернулли (1) при $x > -1$ справедливо не только для $\forall n \in \mathbb{N}$, но и для $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 2. Аналогичным образом можно показать, что при $x \geq -1$ и $\alpha \in]0; 1[$ выполняется неравенство

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x,$$

противоположное неравенству (3).

В дальнейшем, как и в [2], неравенство (3) можно использовать на факультативных занятиях для школьников и студентов, например, как для непосредственного вычисления замечательного степенного предела, так и для получения формулы дифференцирования степенной функции.

Литература

1. Булатов В. И., Голухов В. Г., Кастрица О. А. *Монотонные последовательности. Число Непера.* // Учебные материалы для студентов факультета прикладной математики и информатики. Минск: БГУ, 2019.

2. Булатов В. И., Голухов В. Г., Кастрица О. А. *Об одном экспоненциальном неравенстве.* // Седьмые Богдановский чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1-2 июня 2021 г., С. 232-234

К ВОПРОСУ О ПРОВЕДЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Н.П. Воронова, О.А. Мороз

Оптимизация управления учебным процессом в современной образовательной организации происходит с опорой на всю совокупность современных научных, исследовательских, инновационных данных, которые должны приводить к подготовке специалистов, обладающих не только достаточным уровнем профессиональных знаний, но и высокой

активностью, творческим потенциалом и креативностью. Эффективной формой учебно-профессиональной деятельности является профильная олимпиада. Олимпиады по математике для студентов технических вузов создают условия для познавательной и творческой активности, инициируют реализацию своих способностей, эффективное движение к поставленной цели, стремление к самостоятельному принятию решений [1].

Практика работы в БНТУ свидетельствует о продуктивности олимпиадного движения, которое приводит к улучшению процесса обучения, повышению его качества, оживлению творческого мышления. Особое значение приобретает проблема создания для студентов условий, в которых актуализируются и развиваются множественные грани субъектности будущих специалистов. Решающая роль в этом процессе принадлежит преподавателям, которые проводят специальные занятия по подготовке к олимпиаде, их подход к работе не со студентами «вообще», а с конкретной личностью. В условиях такой деятельности сотрудничество и партнерство преподавателей и студентов базируется на соавторстве, сотворчестве, предполагает высокий уровень активности участников образовательного процесса, разнообразие отношений, порождаемых движением к достижению общей цели.

Высшая школа должна естественным образом соединять в себе процесс обучения и процесс научного поиска [2]. Должен происходить взаимодополняющий процесс обучения для научной работы и научной работы для обучения. Обучающийся должен быть вовлечен в исследование, а не только получать истину как уже готовую данность. Для такой деятельности олимпиады являются первым шагом дальнейшего участия в научных исследованиях. Важную роль при этом имеет подбор заданий для проведения олимпиады. С одной стороны, это задачи из программного курса высшей математики, с другой стороны те, которые требуют нестандартного мышления. Для технического вуза материал должен базироваться не только на углубленном понимании фундаментальных основ математики, но и в значительной степени содержать богатый терминологический фонд по инженерным дисциплинам. С этой целью предлагается рассматривать, например, задачи:

Задача для первого курса.

Определить наибольшее значение секундного расхода воды $Q = cy\sqrt{h-y}$, где y — диаметр круглого отверстия в плотине, h — глубина низшей точки отверстия (h и эмпирический коэффициент c являются постоянными величинами).

Задача для второго курса.

Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m , если известно, что работа действующей на точку силы пропорциональна времени t , протекшему от начала движения (коэффициент пропорциональности k). Начальный путь и начальная скорость равны соответственно S_0 и V_0 .

Литература

1. Бершедова Л.И., Рычихина Э.Н. *Разнообразие современных функций преподавателя высшей школы* // Социология образования. 2015. №2. С.84-91.
2. Гессен С.И., Пауль Наторп // Кантовский сборник. 2014. № 1.

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ВНЕПРОГРАММНОГО ИЗУЧЕНИЯ

М.А. Глецевич, А.П. Шилин

Из линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, допускающих решение в квадратурах, в учебных программах для студентов физико-математических специальностей содержатся лишь уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера. Укажем еще некоторые уравнения:

1.

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - \alpha A_{k+1})x - A_{k+1})y^{(k)} = 0, \quad (1)$$

где α, A_k – заданные постоянные, $k = \overline{0, n+1}$, $n \geq 2$, $A_0 = A_{n+1} = 0$, $A_n = 1$.

2.

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - \alpha A_{k+1})P(x) - A_{k+1}P'(x))y^{(k)} = 0,$$

те же предположения, $P(x)$ – заданный многочлен.

3.

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - \alpha A_{k+1})x + (k+1)(A_{k+1} - \alpha A_{k+2}))y^{(k)} = 0,$$

снова те же предположения, $A_{n+1} = 0$.

4.

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - (\alpha + \beta)A_{k+1} + \alpha\beta A_{k+2})x + (k+1)(A_{k+1} - (\alpha + \beta)A_{k+2} + \alpha\beta A_{k+2}))y^{(k)} = 0,$$

здесь добавлена заданная постоянная β , $\beta \neq \alpha$, $A_{n+1} = A_{n+2} = A_{n+3} = 0$, $n \geq 3$.

5.

$$\sum_{k=0}^n ((A_k - (\alpha + \beta)A_{k+1} + \alpha\beta A_{k+2})x^2 + ((\alpha + \beta)A_{k+2} - 2A_{k+1})x + 2A_{k+2})y^{(k)} = 0,$$

предположения как в предыдущем уравнении.

6.

$$\sum_{k=0}^n \sum_{s=2k}^{n+k} a_{s-k,k} b_{n+k-s} x^s y^{(k)} = 0,$$

где $b_0 = 1, b_1, \dots, b_n$ – заданные числа, $n \geq 1$; $a_{jj} = (-1)^j, j = \overline{0, n}$; $a_{j0} = 0, j = \overline{1, n}$; $a_{jm} = (1 - j - m)a_{j-1,m} - a_{j-1,m-1}, j = \overline{2, n}$ (при $n \geq 2$), $m = \overline{1, j-1}$.

Для этих уравнений можно найти элементарные функции, составляющие фундаментальные системы решений, благодаря чему написать затем общие решения, а также (используя, например, метод вариации произвольных постоянных) общие решения соответствующих неоднородных уравнений. Такие и некоторые другие уравнения можно предлагать для исследования студентам, проявляющим интерес к дифференциальным уравнениям, с целью написания курсовых работ, рефератов, докладов на студенческих научных конференциях, выступлений на коллоквиумах, в качестве дополнительных домашних заданий и т.п. Можно, кроме того, составлять разной сложности примеры этих

уравнений, указывать близкие уравнения, допускающие решение в квадратурах, распространять уравнения на подходящие области комплексной плоскости. Замечательно то, что указанные уравнения не требуют для их анализа знаний сверх учебных программ по дифференциальным уравнениям (в частности, не требуется знаний специальных функций) и поэтому способны уже на младших курсах выработать исследовательские навыки будущих выпускников вузов.

Уравнение (1) указано в [1, с. 248, пример 17], остальные уравнения менее известны и могут представлять некоторый интерес также и специалистам по дифференциальным уравнениям. Специалистам могут показаться интересными и дальнейшие разработки, связанные с приведенными уравнениями (например, [2]).

Литература

1. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Факториал, 1997.
2. Шилин А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т.58. №4. С.358-369.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» НА ФПМИ БГУ

В. В. Дайняк, Е.С. Чеб

Функциональный анализ – одна из базовых дисциплин, которую изучают студенты математических специальностей. Его методы широко используются во многих разделах теоретической и прикладной математики. Благодаря идеям функционального анализа успешно развиваются такие дисциплины как дифференциальные уравнения, методы вычислений, теория управления и др. Его изучение – это элемент серьезного математического образования.

Курс „Функциональный анализ и интегральные уравнения“ читается на факультете прикладной математики и информатики на всех специальностях на протяжении многих лет. За это время его изложение не раз менялось. Последние годы, в связи с изменением учебных планов и переходом на четырехлетнее образование значительно сократилось число часов, отводимых на изучение дисциплины. Поэтому большое внимание уделено методическому обеспечению дисциплины. Подготовлен электронно-методический комплекс (ЭУМК) [1], создан на образовательном портале edufpmi.bsu.by курс „Функциональный анализ и интегральные уравнения“ и изданы методические пособия по курсу [2–6].

Остановимся на особенностях преподавания этой дисциплины на факультете прикладной математики и информатики. Продолжительность изучения дисциплины составляет один семестр, общая трудоемкость – 3,5 зачетных единицы. Главной задачей дисциплины является изучение основных абстрактных структур функционального анализа: метрических, нормированных, банаховых, гильбертовых пространств, теории интегральных уравнений Фредгольма и исследований операторных уравнений, возникающих в прикладных задачах, на разрешимость в заданных пространствах. При изложении теоретического материала наряду с аудиторными лекционными занятиями широко используется образовательный портал. На портале выложен электронный вариант лекций, который включает также материал, выходящий за рамки лекции. Это позволяет лучше

отследить логику изложения и понять, зачем нужен каждый из разделов. Во время чтения лекций студенты на слайдах могут видеть основные моменты лекции. Слайды экономят время при формулировке основных теорем, которых в курсе достаточно много.

Для самостоятельной работы с курсом в соответствии с требованиями, предъявляемыми к ЭУМК в БГУ, разработан электронно-методический комплекс, который включает следующие разделы: введение, теоретический раздел, практический раздел, раздел контроля знаний и вспомогательный раздел, в котором изложены вопросы к экзамену и коллоквиуму со списком задач на доказательство. Именно задачи на доказательство вызывают у студентов затруднения. Поэтому их можно заранее перед экзаменом и коллоквиумом решить дома.

Как показывает опыт, изложение теоретического материала, не подкрепленного практическими занятиями, не позволяет его усвоить в должной степени. Задачи по функциональному анализу довольно специфичны. Для их решения требуется хорошая математическая подготовка по математическому анализу, линейной алгебре и дифференциальным уравнениям. Поэтому у студентов возникают большие проблемы при решении практических задач. Нами подготовлены по каждому разделу методические пособия и указания к решению задач. В каждом методическом пособии вначале кратко излагается теоретический материал, затем приводятся образцы решения задач с подробными пояснениями и в заключении есть набор задач для самостоятельного решения. В пособиях имеются задачи на доказательство. Каждое методическое пособие заканчивается материалом прикладного характера. Так, в методическом пособии [4] изложены вопросы применения метрических пространств в лингвистике, теории передачи информации, в задачах кластерного анализа, в задачах распознавания изображений.

Более 50% времени отводится на самостоятельную работу. На образовательном портале выложены материалы по изучению раздела „Принцип сжимающих отображений и его применение“. В нем излагается теоретический материал и студентам предлагается написать программный код для численного решения нелинейного уравнения, системы линейных алгебраических уравнений и интегрального уравнения методом простых итераций. Такого рода задачи студентами факультета приветствуются. Они наглядно показывают прикладную направленность курса.

Литература

1. Чеб Е. С. *Функциональный анализ и интегральные уравнения : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление специальности: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)»* БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. - Минск : БГУ, 2020.
2. Дайняк В. В., Чеб Е.С. *Линейные ограниченные операторы. 4.1.* Мн.: БГУ, 2013.
3. Дайняк В. В., Чеб Е.С. *Линейные ограниченные операторы. 4.2.* Мн.: БГУ, 2013.
4. Дайняк В. В., Чеб Е.С. *Метрические пространства. 4.1.* Мн.: БГУ, 2020.
5. Дайняк В. В., Чеб Е.С. *Гильбертовы пространства и аппроксимация.* Мн.: БГУ, 2020.
6. Дайняк В. В., Чеб Е.С. *Банаховы пространства.* Мн.: БГУ, 2021.

**О НЕКОТОРЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ В МЕТОДИКЕ ПРОВЕДЕНИЯ
ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

А.Н. Деревяго, А.А. Егоров, И.И. Рушнова

Настоящее сообщение продолжает цикл работ [1, 2], связанных с методикой преподавания дисциплины «Методы математической физики» на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий БГУ. В соответствии с новой учебной программой по этой дисциплине на физическом факультете в текущем учебном году запланировано 50 часов на проведение практических занятий. Существенное увеличение объема практической части позволило дополнить программу новыми разделами. Одним из таких разделов является применение классических интегральных преобразований Лапласа и Фурье для решения задач математической физики, имеющих важное значение в приложениях.

В качестве примера рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны длиной l , жестко закрепленной на концах. Начальное отклонение струны задается равенством $u|_{t=0} = h \sin \frac{\pi x}{l}$, $h = \text{const} > 0$, а начальная скорость равна нулю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = h \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Найдем отклонение струны от положения равновесия при $t > 0$. Обозначим через $U(x, p)$ изображение функции $u(x, t)$ по переменной t . Применяя преобразование Лапласа, с учетом начальных условий переходим от уравнения (1) к операторному уравнению (p рассматриваем как параметр)

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{hp}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4)$$

с граничными условиями, вытекающими из соотношений (2):

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения имеет вид

$$U(x, p) = C_1 e^{(px)/a} + C_2 e^{-(px)/a} + \frac{hp}{p^2 + (a\pi/l)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Подставляя его в (5), находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, получим

$$U(x, p) = \frac{hp}{p^2 + (a\pi/l)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для $U(x, p)$ и решением смешанной задачи (1)–(3) является функция

$$u(x, t) = h \cos \frac{a\pi t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Используем теперь интегральное преобразование Фурье для решения одномерного волнового уравнения. Пусть между двумя точками $x = 0$ и $x = l$ натянута однородная струна длиной l . В точке $x = c$ струна оттягивается на малое расстояние $h = \text{const} > 0$ от положения равновесия и в момент времени $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Необходимо определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

Функция $u(x, t)$ должна удовлетворять смешанной задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c < x \leq l, \end{cases} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8)$$

Применим к дифференциальному уравнению (6) синус-преобразование Фурье, определенное на конечном отрезке $[0, l]$:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = a^2 \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Интегрируя правую часть этого равенства по частям, с учетом граничных условий (7) запишем его в виде

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 U = 0,$$

где $U(k, t) = \int_0^l u(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$.

Далее, применим синус-преобразование Фурье к начальным условиям (8):

$$U|_{t=0} = \int_0^c \frac{hx}{c} \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \int_c^l \frac{h(l-x)}{l-c} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{hl^3}{k^2 \pi^2 c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l}, \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Решая полученную задачу Коши, находим выражение для функции $U(k, t)$:

$$U(k, t) = \frac{hl^3}{k^2 \pi^2 c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l} \cos \frac{k\pi at}{l}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье $u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} U(k, t) \sin \frac{k\pi x}{l}$, окончательно приходим к ответу

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \cos \frac{k\pi at}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Литература

1. Деревяго А.Н., Егоров А.А. *О дополнении к методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на факультете радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Институт математики НАН Беларуси, 2021. С. 239–242.*
2. Березкина Л.Л., Егоров А.А. *Об учебной программе по дисциплине «Методы математической физики» для специальностей факультета радиофизики и компьютерных технологий Белгосуниверситета // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022): материалы Международной научной конференции. Новополоцк, Полоцкий государственный университет, 2022. С. 113–115.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ

А.Н. Деревяго, О.А. Кононова

На физическом факультете БГУ уравнения Вольтерра второго рода рассматриваются в разделе «Линейные интегральные уравнения» из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)y(t)dt \quad (1)$$

называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода* [1, 2]. Функции $f(x)$, $K(x, t)$ – заданные функции, $y(x)$ – искомая функция. Функция $K(x, t)$ называется ядром уравнения. Уравнение, в котором искомая функция $y(x)$ находится только под знаком интеграла, называется *уравнением Вольтерра первого рода*.

Будем рассматривать уравнения Вольтерра (1) специального вида, когда его ядро есть функция вида $K(x - t)$. Такие интегральные уравнения называются *уравнениями типа свертки*:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x - t)y(t)dt. \quad (2)$$

Пусть $y(x) \doteq Y(p)$, $f(x) \doteq F(p)$ и $K(x) \doteq K(p)$. Применяя для двух частей уравнения (2) преобразование Лапласа и формулу умножения изображений

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

получим

$$Y(p) = F(p) + K(p)Y(p),$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}, \quad K(p) \neq 1. \quad (3)$$

По известному изображению (3) находится оригинал $y(x) \doteq Y(p)$.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt. \quad (4)$$

Пусть

$$y(x) \doteq Y(p), \quad \cos x \doteq \frac{p}{p^2 + 1}, \quad e^x \doteq \frac{1}{p - 1}, \quad \int_0^x e^{x-t} y(t) dt \doteq \frac{1}{p - 1} Y(p).$$

Таким образом,

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p - 1} Y(p),$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{2}{5} \frac{1}{p - 2} + \frac{3}{5} \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Тогда решением исходного уравнения (4) является функция

$$y(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Пример 2. Найти решение системы уравнений

$$y(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)} y(t) dt + \int_0^x z(t) dt, \quad (5)$$

$$z(x) = 4x - \int_0^x y(t) dt + 4 \int_0^x (x - t) z(t) dt. \quad (6)$$

Пусть

$$y(x) \doteq Y(p), \quad z(x) \doteq Z(p), \quad 1 \doteq \frac{1}{p}, \quad e^{2x} \doteq \frac{1}{p - 2}, \quad x \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Тогда система операторных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p} - \frac{2}{p - 2} Y(p) + \frac{1}{p} Z(p), \\ Z(p) &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p} Y(p) + \frac{4}{p^2} Z(p). \end{aligned}$$

Из полученной системы выражаем изображения $Y(p)$ и $Z(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p(p - 2)}{p^3 - 3p - 2} = \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{(p + 1)^2}, \\ Z(p) &= \frac{3p + 2}{(p + 1)^2(p - 2)} = \frac{8}{9} \frac{1}{p - 2} + \frac{4}{9} \frac{1}{p + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(p + 1)^2}. \end{aligned}$$

Восстанавливая оригиналы, находим решение исходной системы уравнений (5), (6):

$$y(x) = e^{2x} + xe^{-x}, \quad z(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения Вольтерра первого рода

$$x^4 = \int_0^x (2x^3 - 3x^2t + t^3) y(t) dt. \quad (7)$$

Преобразуем ядро уравнения (7) к ядру типа свертки. Пусть $x = x_1 + t$. Тогда

$$2x^3 - 3x^2t + t^3 = 2(x_1 + t)^3 - 3(x_1 + t)^2t + t^3 = 2x_1^3 + 3x_1^2t = 2(x - t)^3 + 3(x - t)^2t,$$

и уравнение (7) преобразуется к виду:

$$x^4 = 2 \int_0^x (x - t)^3 y(t) dt + \int_0^x (x - t)^2 t y(t) dt.$$

Пусть

$$y(x) \doteq Y(p), \quad xY(x) \doteq -Y'(p), \quad x^2 \doteq \frac{2}{p^3}, \quad x^3 \doteq \frac{3!}{p^4}, \quad x^4 \doteq \frac{4!}{p^5}.$$

Получим

$$\frac{24}{p^5} = 2 \cdot \frac{6}{p^4} Y(p) + 3 \cdot \frac{2}{p^3} (-Y'(p)), \quad \text{или} \quad Y'(p) - \frac{2}{p} Y(p) = -\frac{4}{p^2}. \quad (8)$$

Интегрируя (8) методом Лагранжа, получим

$$Y(p) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p}.$$

Следовательно, $y(x) = 4/3$ – искомое решение уравнения (7).

Литература

1. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Высшая школа, 1967.
2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями*. М.: Едиториал УРСС, 2003.

КОЛЛОКВИУМЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

В.И. Зеленков

Те разделы математики, которые студенты физического факультета изучают на первом и втором курсах, вряд ли существенно изменились за последние пятьдесят лет. Тем не менее, повсеместное внедрение информационных технологий позволяет по-новому решать задачи, которые еще недавно решать было практически невозможно. Преподавание математических дисциплин в современных условиях должно принимать это во внимание.

Кроме того, студенты физфака должны понимать, как математические приемы могут быть использованы в физических задачах.

Рассмотрим в качестве примера проведение коллоквиумов открытого типа на первом и втором курсах физического факультета БГУ. Коллоквиумы проводятся дистанционно с использованием образовательного портала БГУ, разработанного на базе платформы Moodle. Теоретические материалы и задания загружаются на портал и там же студенты отправляют свои работы преподавателю. При этом предполагается, что в работе используется среда Wolfram Mathematica (далее WM; необходимая справочная информация предоставляется).

Первый курс, дисциплина «Теория функций комплексной переменной».
Тема коллоквиума: *Понятие о комплексном гидродинамическом потенциале.*

Известно, что теория аналитических функций широко применяется для решения задач гидродинамики. Каждой аналитической функции можно сопоставить комплексный гидродинамический потенциал и, напротив, каждому комплексному потенциалу соответствует аналитическая функция. Зная потенциал, можно получить различные характеристики движения жидкости. Об этом предварительно рассказано на лекции, детальная информация с иллюстрациями содержится в загруженном на портал руководстве к выполнению заданий коллоквиума.

Студентам предлагаются программа-минимум, программа-медиум и программа-максимум. Выполнение программы-минимум дает, как правило, оценку 4–6 баллов, минимум+медиум — 7–8 баллов, минимум+медиум+максимум — 9–10 баллов.

Программа-минимум. Заданы три функции: аналитическая $f(z)$ и гармонические $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Требуется найти:

1. Потенциальную функцию $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$ потока жидкости, если задан комплексный потенциал $f(z)$.
2. Комплексный потенциал $f(z)$, если задана потенциальная функция $\varphi(x, y)$.
3. Комплексный потенциал $f(z)$ если задана функция тока $\psi(x, y)$.

В каждом случае необходимо записать уравнения для потенциальных линий, линий тока, проекции вектора скорости V_{Ox} и V_{Oy} на оси координат, абсолютного значения и направления вектора скорости, а также построить графики потенциальных линий и линий тока (функция WM ContourPlot и векторное поле скоростей (функции VectorPlot или StreamPlot, рис. 1).

Эта задача с математической точки зрения сравнительно простая, так как все необходимые формулы известны, трудности могут возникнуть разве что при построении графиков.

Программа-медиум. В руководстве, которое предоставляется студентам перед выполнением работы, описаны простейшие течения: источники, стоки, вихри, вихресточники, диполи и др. В задании предлагается рассмотреть различные комбинации двух и более

точечных источников, исследовать зависимость характера потенциальных линий и линий тока от характеристик объектов (обильность источника, интенсивность вихря, момент диполя), а также от расстояния между ними. Здесь предполагается использование функции *WM Manipulate*, позволяющей в интерактивном режиме отслеживать зависимость течения жидкости от параметров.

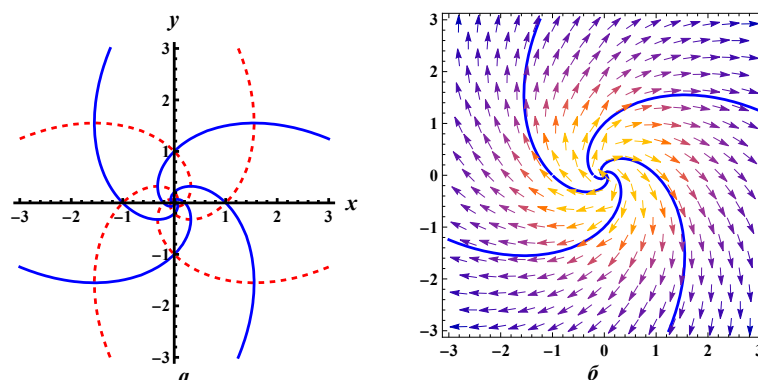


Рис. 1. а) Линии уровня (штриховые) и линии тока (сплошные) для точечного вихреисточника.
б) Направления течения жидкости вблизи точечного вихреисточника

Программа-максимум. Определить тип (окружность, парабола, гипербола, эллипс, спираль, прямая и т. п.) эквипотенциальных линий и линий тока для простейших течений.

Здесь же предусмотрено творческое «суперзадание». В руководстве в качестве примера подробно рассмотрено решение задачи о течении идеальной жидкости, обтекающей пластинку, перпендикулярную горизонтальному дну. Для этого нужно построить конформное отображение области течения (верхняя полуплоскость с разрезом $[0; ih]$) на верхнюю полуплоскость с учетом того, что в *WM* главное значение аргумента лежит в пределах $(-\pi; \pi)$. Студентам предлагается решить аналогичную задачу, используя, например, конформные отображения на верхнюю полуплоскость, полученные на практических занятиях.

Второй курс, дисциплина «Основы функционального анализа и теории функций». Тема коллоквиума: *Применение преобразования Лапласа к расчету электрических цепей.*

В работе рассматривается цепь, содержащая источник, активное сопротивление, катушку индуктивности и конденсатор (элементов одного типа может быть и несколько). Применяя методы операционного исчисления, следует найти распределение токов и исследовать зависимость токов от параметров цепи.

Задание и в этом случае имеет три уровня.

Программа-минимум. Получив схему цепи, соответствующую номеру варианта, рассчитать общую силу тока. Изменяя ЭДС источника (внутренним сопротивлением пока можно пренебречь), внешние сопротивления, индуктивности и емкости функцией *Manipulate*, исследовать зависимость тока от параметров цепи, получить аperiodический процесс, затухающие колебания и, если возможно, незатухающие колебания.

Программа-медиум. Рассчитать также силу тока в отдельных участках цепи, построить графики. Учесть внутреннее сопротивление источника.

Программа-максимум. Добавить новые элементы цепи. Исследовать цепь с переменной ЭДС, которая может задаваться формулами $U(t) = U_0(1 + e^{-\alpha t})$, $U(t) = U_0 \cos \omega t$ (в этом случае оценить возможность резонанса) и т. п.

В качестве дополнительной опции предлагается пояснительный текст готовить в среде \LaTeX . Это задание не является обязательным, но знание основ \LaTeX необходимо для набора формул на портале Moodle и уже хотя бы поэтому полезно.

На решение задач каждого коллоквиума отводится продолжительный срок — три-четыре недели. Вопросы (как чисто математического плана, так и по \LaTeX и \LaTeX) рекомендуется задавать на форуме, размещенном на портале — только в этом случае в диалоге можно использовать формулы, рисунки и фрагменты файлов.

Опыт показывает, что задания обоих коллоквиумов и их графическое воплощение вызывают у студентов интерес. В будущем предполагается сделать подобную работу и по теме «Специальные функции».

ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ И ТЕСТЫ»

Н.И. Ильинкова, И.И. Рушнова, Т.А. Чехменок

Одним из важнейших направлений модернизации методики преподавания высшей математики в высшей школе является поиск новых форм организации и стимулирования самостоятельной работы студентов. С целью совершенствования самостоятельного обучения студентов коллективом авторов кафедры высшей математики и математической физики физического факультета на основе многолетнего опыта преподавания математического анализа студентам физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета было подготовлено учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Теория и тесты».

Дисциплина «Математический анализ» является базовым теоретическим и практическим основанием для всех последующих математических и физических дисциплин в структуре образовательной программы физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета [1-3]. Математический анализ является фундаментом для успешного овладения теорией дифференциальных и интегральных уравнений, методами математической физики. Аппарат математического анализа широко используется в курсах общей и теоретической физики. Отметим, что данное пособие является дополнением к ранее изданному авторами учебному пособию «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной» [4], основу которого составил курс лекций «Математический анализ», читаемый на факультете радиофизики и компьютерных технологий. В пособии [4] приведены доказательства теорем, большое количество примеров и подробно разобранных задач, иллюстрирующих различные способы решения. Назначение пособия «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Теория и тесты», содержащего порядка 700 тестовых заданий, дать возможность каждому студенту, слушающему лекции, самостоятельно проконтролировать глубину усвоения пройденного материала.

Учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Теория и тесты» состоит из шести глав: «Введение», «Числовые последовательности и ряды», «Предел функции. Непрерывность», «Дифференциальное исчисление. Формула Тейлора», «Интегральное исчисление», «Несобственные интегралы». Для облегчения выполнения тестовых заданий каждая глава начинается с необходимого теоретического минимума: формулируются важнейшие определения, даются базовые понятия, теоремы и формулы. В конце каждой главы приводится составляющий наиболее

существенную часть пособия обширный массив тематических тестов с вариантами ответов.

Учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Теория и тесты» выйдет в свет в 2023 году и предназначено для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета, а также студентам высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области физики, техники и компьютерных технологий.

Литература

1. Ахраменко В.К. и др. *Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: ЭУМК*. БГУ, Физический фак., кафедра высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2020. [<https://elib.bsu.by/handle/123456789/250914>]
2. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/275164> *Математический анализ: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 03 07-02 Прикладная информатика, 1-98 01 01-02 Компьютерная безопасность. №УД-10283/уч.*
3. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/275169> *Математический анализ: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 1-31 04 02 Радиофизика; 1-31 04 03 Физическая электроника; 1-31 04 04 Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии. №УД-10282/уч.*
4. Ахраменко В.К., Ильинкова Н.И., Рушнова И.И., Чехменок Т.А. *Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной*. Мн.: РИВШ, 2022.

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ РАЗЛИЧНОГО ТИПА ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

О.А.Кастрица, С.А.Мазаник

Модули «Математический анализ» и «Высшая математика» являются составной частью учебных планов различных специальностей, по которым осуществляется обучение студентов на факультете прикладной математики и информатики. В эти модули включены учебные дисциплины «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Математический анализ», «Ряды и функции комплексного аргумента», «Теория функций комплексного переменного», программы которых предусматривают (так или иначе) изучение интегралов различных типов: неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойной интеграл, тройной интеграл, криволинейные интегралы первого и второго рода, поверхностные интегралы первого и второго рода, интегралы функций комплексного аргумента. Все эти математические объекты представляют собой суммы (обобщенные) бесконечного несчетного множества значений некоторой непрерывно меняющейся величины, определенной на том или ином множестве с той или иной мерой. Такой подход к пониманию сущности интеграла прослеживается в единой методике определения интегралов разных типов.

Первичным является построение определенного интеграла Римана от функции одной переменной, заданной на отрезке [1]. Вычисление интегралов других типов так или иначе сводится к вычислению определенных интегралов.

Единый подход к определению интегралов предусматривает единую терминологию и заключается в следующем. Множество D , на котором определяется интеграл, разбивается на части D_k с мерой Δ_k . На каждой части D_k берется точка M_k и вводится

понятие *интегральное разбиение множества* $\{D_k, M_k\}$, на котором строится интегральная сумма

$$\sum_{k=1}^n f(M_k)\Delta_k$$

и осуществляется условный переход к пределу. Введение термина “интегральное разбиение” упрощает формулировки и доказательство критериев интегрируемости, теорем о свойствах интеграла и др.

Такой алгоритм построения определения интегралов: *интегральное разбиение – интегральная сумма – интеграл* приемлем для интегралов любого названного выше типа. Меняются лишь объекты: множество, его мера, функция. Естественным становится и прикладной смысл (механический, физический, экономический и др.) того или иного конкретного интеграла.

Такой подход применим и при работе с интегралами от функций n переменных.

Литература

1. Богданов Ю. С., Кастрица О. А., Сыроид Ю. Б. *Математический анализ: Учеб. пособие для вузов.* М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.

УПРАВЛЯЕМАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА КАК СПОСОБ РАЗВИТИЯ СУБЪЕКТНОСТИ СТУДЕНТА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВУЗА

С.В. Майоровская

Одним из важнейших критериев качества современного образования следует считать адаптивность дипломированных специалистов к стремительно меняющимся социальным и экономическим условиям и, как следствие, их постоянную востребованность на рынке труда. Возрастание неопределенности, динамичности существования и развития человека в современном мире требует подготовки разносторонне развитых специалистов, способных учиться на протяжении всей жизни. Очевидно, получение высшего образования не сводится к простому накоплению знаний, являясь скорее постижением способов их добывания, передачей новой формации специалистов важнейших когнитивных кодов. По меткому выражению Ральфа Уолдо Эмерсона «То, чему мы учились в школах и университетах, не образование, а только способ получить образование».

В этой связи особенно актуальной становится проблема переноса акцента в обучении с деятельности преподавателя на деятельность студента, причем образовательный процесс протекает в результате творческой деятельности субъект-субъектного взаимодействия преподавателей и студентов.

Субъектность рассматривается здесь как «качество личности студента, интегрирующее в своей структуре мотивационно-ценностный, отношенческий и регулятивно-деятельностный компоненты. При этом системообразующую функцию в трехкомпонентной структуре выполняет отношенческий компонент, транслирующий активное, инициативное, ответственное, избирательное отношение студента к самому себе, к людям, к миру» [1].

Проблема становления субъектности студентов в образовательном процессе вуза относится к числу ключевых проблем педагогики и психологии и является междисциплинарной, однако математика занимает особое место среди изучаемых в вузах дисциплин,

поскольку она является основой мышления в поле доставшегося нам в наследие советского культурного канона, который, в свою очередь, наследовал прусскому.

Важнейшей характеристикой субъекта является самостоятельность, которая «включает более существенную способность самостоятельно, сознательно ставить перед собой те или иные задачи, цели, определять направления своей деятельности» [2].

Классическая форма обучения высшей математике в вузе, включающая в себя лекции и практические занятия предполагает, что студент представляет собой достаточно мотивированную личность, способную к рефлексивной самодисциплине, однако в последние годы уровень мотивации и студентов, и их способность к самоконтролю неуклонно снижаются. Возможности частого и регулярного контроля, обучающегося на занятиях, снижаются также, ввиду постоянно возрастающей нагрузки на преподавателя.

В таких условиях важнейшим способом становления субъектности студента становится управляемая самостоятельная работа (УСР). Под ней следует понимать систематически осуществляемую под контролем преподавателя автономную деятельность студента, которая постепенно становится доминантной и обеспечивает практическое применение усвоенных обучающимся когнитивных кодов. В настоящее время согласно положению о самостоятельной работе студентов УО БГЭУ, где работает автор, на освоение учебного материала в рамках УСР для специальностей высшего образования I ступени может отводиться до 30 процентов аудиторных часов, предусмотренных типовым учебным планом на изучение данной дисциплины. Обязательными условиями эффективной организации самостоятельной работы по учебной дисциплине являются: наличие научно-методического обеспечения по учебной дисциплине, использование рейтинговой системы оценки знаний.

Для обеспечения эффективности УСР должны быть выполнены следующие условия: 1) обеспечение оптимального сочетания объёма аудиторной и самостоятельной работы; 2) методически правильная организация работы студента; 3) обеспечение студентов необходимыми учебными и методическими материалами с целью превращения самостоятельной работы в творческий процесс; 4) осуществление контроля за ходом УСР и использование бонусов, поощряющих студента за её качественное выполнение (см. [3]).

Выполнения этих условий помогает добиться организованное на уровне университета использование виртуальной обучающей среды Moodle. Автор полагает, что целесообразным является постепенное смещение акцента с аудиторной практической работы на УСР. При этом основными компонентами работы в аудитории должны являться организация контроля за УСР и консультационная работа в противовес традиционным объяснениям и решению задач у доски, когда большая часть студентов превращается в пассивных потребителей информации, которую они к тому же не в состоянии усвоить в силу недостаточной подготовленности.

При организации УСР по высшей математике для студентов экономических специальностей необходимо вначале обеспечить студента достаточным количеством несложных стандартизированных заданий, решение которых направлено, однако, на оттачивание логического мышления будущих экономистов. Самостоятельно изучая некоторые разделы высшей математики, студент обретает умение перерабатывать большие объёмы информации в сжатые сроки. На более высоком уровне обучающийся обретает возможность создавать лаконичные теории и модели, охватывающие большой класс разнообразных предметов, процессов и явлений. Параллельно студент развивает умение выражать эмпирическое знание на языке символов – интерпретировать символы на языке опыта. Тем самым реализуются ключевые преимущества использования математики в преподавании экономики (см. [4]).

Высшее образование в нашей стране носит массовый характер, диплом о высшем образовании все еще остается элементом национального культурного кода. В этой связи на вузовское образование ложится нелегкая задача воспитания мышления широких масс молодежи. Математика имеет огромные возможности для формирования универсальных компетенций. Работа с идеальными абстракциями, развитие логики и принципа доказательности будут полезны специалисту, как в плане профессиональном, так и в личностном. При этом в силу специфики своего содержания математика более, чем какая-либо другая дисциплина, требует осознанной систематической самостоятельной работы обучающегося, которая является неотъемлемым элементом стратегии и тактики развития субъектности студента в образовательном пространстве вуза. Управляемая самостоятельная работа студентов, как особым образом организованная целенаправленная деятельность, крайне важна в учебном процессе и заслуживает самого пристального внимания и развития.

Литература

1. Аксенова Г. И., Купцов М. И., Аксенова П. Ю. *Субъектность студента как средство формирования антихрупкости высшего образования.* // Прикладная юридическая психология. 2017. № 4. – С. 6 – 12.
2. Брушлинский А. В. *Субъект: мышление, учение, воображение.* М.: Воронеж, 1996.
3. Лученкова Е. С. *Управляемая самостоятельная работа студентов как способ его включения в активную учебную деятельность.* // Проблемы современного образования в техническом вузе : материалы V Междунар. науч.-метод. конф., Гомель, 26–27 окт. 2017 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. С. 84–85.
4. Тутов Л. А., Рогожникова В. Н. *Дилемма «экономист или математик»: взгляд философии.* // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. 2018. № 1. С. 3 –17.

СТРУКТУРНО-ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

И.В. Марченко

Структурно-логические схемы широко применяются в учебном процессе. По В.И. Земцовой «Структурно-логическая схема (СЛС) – модель, отражающая основное содержание изучаемого объекта и являющаяся ориентировочной основой действий» [1]. Такая модель может быть представлена в виде таблиц, рисунков, диаграмм и т.п. Помимо компактного представления больших объемов информации, использование структурно-логических схем позволяет систематизировать учебный материал, развивать интеллектуальные способности обучающихся, демонстрировать и учить применению таких методов познания, как анализ, синтез и др.

В [2] и [3] проанализированы возможности структурно-логических схем в преподавании теории вероятностей и математической статистики, теории рядов.

Приведем несколько структурно-логических схем по курсу дифференциального исчисления для специальности «Математика и информатика». Одним из примеров является схема, содержащая в себе формулировки критериев постоянства и монотонности функции одной переменной (рисунок 1). Она позволяет изложить их быстро и компактно.

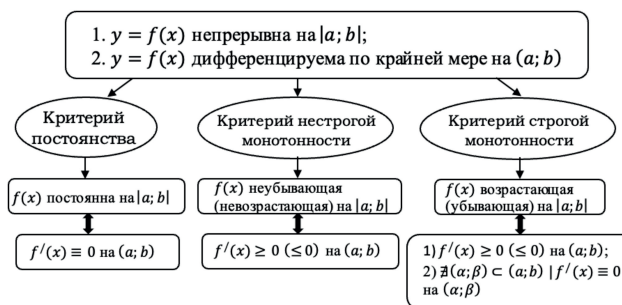


Рисунок 1. СЛС критериев постоянства и монотонности

При изучении дифференциального исчисления вначале излагается дифференциальное исчисление функций одной переменной, а затем функций нескольких переменных. Поэтому необходимо, чтобы студенты четко видели различия и особенности этих разделов. Для этого используется схема, отражающая связи между такими основными понятиями, как производная, частные производные, дифференцируемость и дифференциал (рисунок 2). Естественно, можно расширить эту схему и другими понятиями.

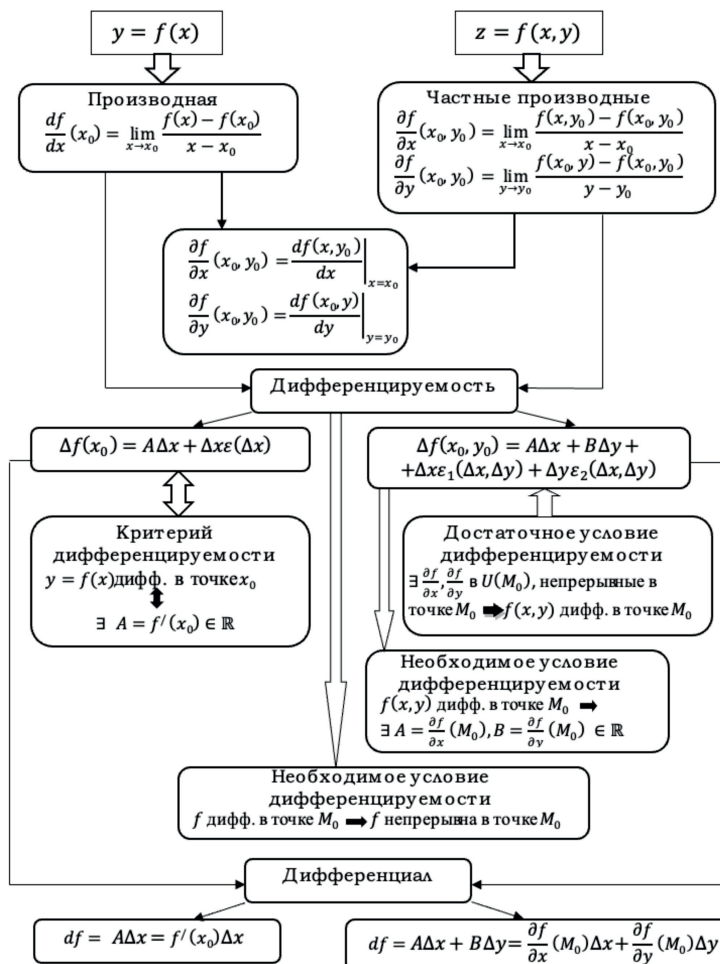


Рисунок 2. СЛС основных понятий дисциплины «Дифференциальное исчисление»

Цели, с которыми используются эти две схемы, различны. Первая схема позволяет экономить время на формулировании теорем, выделить общие условия их применимости. Вторая схема реализуется как подведение итогов по изучению дисциплины. Ее

можно предложить построить студентам самостоятельно, тогда эффект от нее будет больше. Опыт показывает, структурно-логические схемы могут успешно применяться в преподавании различных математических дисциплин для повышения качества процесса обучения.

Литература

1. Земцова В. И., Е. В. Кичигина *Структурно-логические схемы как средство развития естественнонаучной образованности студентов педагогического направления гуманитарных профилей* // Фундаментальные исследования. 2012. № 3-3. С. 576-580.

2. Марченко И. В. *Структурно-логические схемы в преподавании теории вероятностей и математической статистики* // XX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения -2022»: материалы междунар. научн. конф., Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г. В 2 ч. Ч.2 / под ред. В.В. Амелкин [и др.]. – Новополоцк : Полоцкий государственный университет, 2022. С. 129-130.

3. Марченко И. В. *Структурно-логические схемы при изучении рядов* // Междунар. научно-практ. семинар «Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях»: материалы междунар. научно-практ. семинара, Могилев, 23 февраля 2023 г / под ред. М.Е. Лустенкова (гл. ред.) [и др.]. – Могилев : Бел.-Росс. ун-т, 2023. С. 73-76.

ФОРМИРОВАНИЕ БАЗОВЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ У СТУДЕНТОВ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МОДУЛЯ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

А.П. Мателенок, В.С. Вакульчик, Т.И. Завистовская

Необходимость ориентации современной системы высшего инженерного образования в Республике Беларусь на усиление качества подготовки специалистов обуславливает проблему формирования у студентов компетенций, определяющих их способности к разработке на основе математического моделирования новых и оптимизации уже существующих технологических, энергосберегающих процессов. Поэтому разработчиками в учебных стандартах по дисциплине "Высшая математика" для указанных специальностей были выделены следующие базовые профессиональные компетенции: БПК-1 - "Применять знания естественнонаучных учебных дисциплин для экспериментального и теоретического изучения, анализа и решения прикладных задач переработки природных энергоносителей"; БПК-2 - "Применять основные методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для решения профессиональных задач" [1].

Дифференциальные уравнения являются одним из самых популярных и мощных средств математического решения химико-технологических задач. Особенно широко они используются для решения задач теоретической механики, физики, физической химии и дисциплины "Процессы и аппараты химических технологий которые возникают везде, где есть необходимость количественного и качественного описания явлений. Поэтому при изучении дисциплины "Высшая математика" отдельное внимание уделяется изучению модуля "Дифференциальные уравнения".

Особенностью изучения выделенного модуля является необходимость выполнения студентами важного контрольного мероприятия: внеаудиторной контрольной работы (ВКР). В ее содержание включены две профессионально ориентированные задачи различного уровня сложности. Всего в ВКР входит 10 заданий. Выполнение всех заданий работы обязательно.

В соответствии с учебными программами дисциплин, изучение данного модуля совпадает с изучением численного решения дифференциальных уравнений с использованием систем компьютерной алгебры (СКА) и табличного редактора Excel в дисциплине "Численные методы". При этом одна из лабораторных работ по этой дисциплине требует выполнения всех заданий внеаудиторной контрольной работы по математике в СКА.

Результат такого пересечения предполагает сопоставление и критический анализ имеющихся учебных знаний, теоретическое обобщение полученных сведений, формирование умений применять междисциплинарный подход при изучении различных дисциплин. При этом следует отметить, что поощряется составление студентами частных алгоритмов решения задач. Целью такого методического подхода является формирование навыков структурирования этапов решения задачи и проектирования его в виде частного алгоритма [2].

«Создание студентами собственных частных алгоритмов рассматривается нами в качестве индивидуального продукта, в котором фиксируются усвоенные способы деятельности. В дальнейшем студенты будут применять частные алгоритмы при решении задач из других модулей, а также в процессе изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин. При разработке частных алгоритмов заданий каждый обучаемый сам осознает и оценивает степень достижения цели задачи, уровень своих внутренних изменений, усвоенные способы решения и освоенные им области» [3, с. 29].

В дальнейшей учебной деятельности студентов разработка частных алгоритмов решения задач будет давать возможность охватить решение "единым взглядом что значительно развивает системное мышление, облегчает обработку, анализ и интерпретацию полученных результатов научных исследований для публикаций, презентаций, докладов, отчетов. Для усиления формирования базовых компетенций, а также с целью развития умений, связанных с использованием технических устройств, работой с информацией и ее представлением, студентам, представившим лучшие работы, предлагается выступить на студенческой конференции. Если выступление и решение задач принимается и заслуживает высшей оценки, то в дальнейшем исследуемая модель используется, по согласованию с преподавателями выпускающей кафедры, для курсового проектирования.

Нам представляется, что предлагаемая методика включения в учебно-познавательный процесс реальных химико-технологических моделей при решении математических задач с применением теории ДУ служит реализации принципов преемственности, профессиональной направленности, способствует формированию выделенных компетенций.

Литература

1. *Образовательный стандарт высшего образования. Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-48 01 03 «Химическая технология природных энергоносителей и углеродных материалов»*: ОСВО 1-48 01 03-2013. – Введ. 30.08.2013. – Минск : М-во образования Респ. Беларусь: РИВШ, 2013.
2. Мателенок А. П. *Элементы эвристического обучения математике в компонентах УМК нового поколения* // Матэматыка. 2019. № 6. С. 45–52.
3. Вакульчик В. С., Мателенок А. П. *Формирование компетенций исследовательской деятельности студентов технических специальностей в математическом междисциплинарном модуле* // Выш. шк. 2021. № 1. С. 27–32.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Д.А. Новичкова

В настоящее время в обсуждении методических аспектов преподавания в высшей школе большое внимание уделяется информатизации образования. В докладе рассматриваются положительные и отрицательные стороны использования информационных технологий на занятиях по Математическому анализу. Данная дисциплина входит в ряд классических математических дисциплин в рамках общего курса Высшая математика. Применение традиционной формы изложения материала при фронтальной работе "с мелом у доски" у большинства преподавателей является приоритетной. Это не только дань традициям. Практика использования технических средств презентации всего объёма материала, а также дистанционного обучения показывает, что уровень усвоения учебного материала ниже, нежели при применении традиционной формы изложения. В то же время не стоит полностью исключать возможность использования информационных технологий в преподавания данной дисциплины. Специфика курса требует зачастую демонстрации графиков функций, изображения поверхностей и кривых в пространстве. Несомненно технические средства, например, математические пакеты позволяют добиться в этом прекрасных результатов. Изображение с помощью графических программ, например, частей римановых поверхностей и других объектов изучения теории функций комплексного переменного впечатляет студентов, повышает их интерес к изучению дисциплины. Для лучшего понимания студентами сути некоторых вычислений в Математическом анализе также можно прибегнуть к помощи математических пакетов. Например, для создания анимаций вычисления определённого интеграла, предела суммы, предела последовательности, производной функции в пошаговом режиме [1]. Наглядность и визуализация помогают лучшему усвоения материала. Также математические пакеты и графические редакторы дают пользу при эпизодическом применении в рамках традиционного способа изложения и других аспектов данной дисциплины.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. *Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию.* - Казань: Казанский университет, 2014.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ

В.А. Прокашева, Г.А. Расолько, В.В. Лысак

Преподавание курса «Высшая математика» на нематематических факультетах всегда требует особого отношения и сопряжено с преодолением в студенческой среде барьера «А зачем?». Приходится учитывать недостаточную подготовку по усвоению школьного курса, отсутствие вступительных тестов и экзаменов при поступлении в ВУЗ. С целью преодоления внутреннего барьера на понимание «Математика важна и нужна» с первых лекций все темы привязываются к проблемам избранной специальности.

Наиболее плодотворным примером союза являются математика и биология, математика и химия лекарственных соединений, медицина. Учитывая, что высшая математика изучается на первом курсе и многие направления в биологии и химии первокурсникам не

известны, предлагаемые примеры и их актуальность обговариваются и согласовываются с преподавателями соответствующих кафедр, курирующих названные направления.

Процесс проникновения математики в биологию имеет длительную историю. В конце 18-го века биологи начали разрабатывать методы моделирования популяций, чтобы понять динамику роста и сокращения всех популяций живых организмов. Описанная математическая модель популяции с наименьшей критической численностью имеет огромную практическую ценность, так как помогает определить в каком состоянии (устойчивом или нет) будет находиться популяция в определенный промежуток времени, а также позволяет предсказать приближение популяции к опасным границам, дальше которых идет вырождение. Наиболее активное использование математических моделей появилось в 20 и 21 веках. В последнее десятилетие в математике возник ряд новых направлений, связанных с изучением моделей систем высокой сложности, что способствует разработке новых принципов исследования структуры изучаемых в настоящее время биологических систем.

Современная математическая биология использует различный математический аппарат для моделирования процессов в живых системах и формализации механизмов, лежащих в основе биологических процессов. Имитационные модели позволяют на компьютерах моделировать и прогнозировать процессы в нелинейных сложных системах, каковыми являются все живые системы, далекие от термодинамического равновесия. Базовые модели математической биологии в виде простых математических уравнений отражают самые главные качественные свойства живых систем: возможность роста и его ограниченность, способность к переключениям, колебательные и стохастические свойства, пространственно-временные неоднородности. Вместе с тем следует учитывать, что любая индивидуальная живая система требует глубокого и детального изучения, экспериментального наблюдения и построения своей собственной модели, сложность которой зависит от объекта и целей моделирования.

Тема «Дифференциальные уравнения» является частью учебного курса высшей математики, преподаваемого на биологическом факультете. В связи с ограниченностью учебных часов изучаются только дифференциальные уравнения первого и второго порядка. Рассматриваются задачи, приводящие к построению простейших дифференциальных моделей. Считаем целесообразным рассмотреть пример использования принципа Портфеля одного уравнения в системе практика-ориентированной подготовки студентов при изучении дифференциальных уравнений первого порядка.

К изучению такого типа уравнения приводит целый ряд, казалось бы, разных по звучанию задач естествознания. Выясняется, что уравнения и выражения, созданные для целей одной науки, зачастую применимы после определенной переработки, к другой.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка вида $dy/dx = ky$, где k – некоторый коэффициент. Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, его решение доступно для любого студента. Разделяя переменные и интегрируя, получим решение $Y = C \exp(kx)$, где $C = const$.

Используя начальные условия, находим частное решение. На базе полученного решения строится интегральная кривая, график которой показывает либо возрастание функции, либо убывание в зависимости от знака коэффициента k .

2. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток описывается формулой $dm/dt = -km$, k больше нуля, m – количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся ко времени t , здесь k – коэффициент прочности таблетки.

Известно, что производная функции есть скорость изменения этой функции. Таким

образом этот Закон звучит так: скорость растворения лекарственных форм из таблеток пропорциональна количеству форм вещества в таблетке.

3. Закон размножения бактерий с течением времени: x – число бактерий, k – коэффициент пропорциональности $dx/dt = kx$, где $x = x(t)$, причем $k > 0$.

4. Закон роста клеток с течением времени $dl/dt = (m - n)lt$, где l – длина клетки, m и n – постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада соответственно.

5. Закон разрушения клеток в звуковом поле. Простейшие, бактерии, лейкоциты, эритроциты, водоросли, дрожжи и др. могут быть разрушены ультразвуком. Скорость разрушения принимает вид $dN/dt = -RN$, где N – концентрация клеток, t – время, R – постоянная.

6. Составление и решение простейшей дифференциальной модели в теории эпидемий. Если a – число зараженных особей, b – число незараженных особей, $x(t)$ и $y(t)$ – соответственно, число зараженных и незараженных особей к моменту времени t , то в любой момент времени t имеем $x + y = a + b$. Закон изменения числа незараженных особей с течением времени запишется в виде $dy/dt = -ky(a + b - y)$, $k = \text{const}$, здесь $y = f(t)$, т.е. функция времени.

7. Динамика любой популяции с учетом влияния ограниченных возможностей района проживания сводится к дифференциальному уравнению $dm/dt = k(b - m)m$, где m – биомасса популяции. Район обитания популяции имеет определенные ресурсы b , они обеспечивают нормальное развитие популяции, если ее биомасса m не превосходит b . Если $b < m$, то для развития популяции ресурсов района не хватает, и она начинает вымирать.

8. В медико-биологических приложениях дифференциальные уравнения используются: для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиология), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики; для описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцеелограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиолография.

9. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки-Вольтера используются для взаимодействия между конкурирующими биологическими видами.

Указанные направления, как правило, находят более глубокие отражения при написании рефератов и подготовке презентаций. Ежегодно студентам предлагается примерный перечень рекомендуемых для изучения тем, одновременно приветствуется введение новых актуальных современных направлений, описанных языком математики типа: лихорадка Эбола, болезнь Денге, заболевания, вызываемые ВИЧ, заболевания бактериальной, грибной и вирусной этиологии, вопросы экологии, различные аспекты теории эпидемий, проблемы сердечно-сосудистых заболеваний и др.

Литература

1. Ризниченко Г. Ю. *Лекции по математическим моделям в биологии*. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

О СВОЙСТВАХ РУССКОГО ЯЗЫКА И ПРОИСХОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ БАЗОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Н.Я. Радыно

Каждый, изучающий математику сталкивается со словесными высказываниями, формулировками, построениями логических цепочек утверждений, предположениями. В основе любой деятельности человека лежит речь – способ передачи мыслей. Слова же

являются «кирпичиками» мысли, слова несут смыслы. Когда слова искажены, то искажаются и смыслы. Если смыслы искажены или неточны, то страдает вся научная картина. Сейчас мы и наблюдаем такое искажение научной мысли. Поэтому важно понимать, как формируются кирпичики мысли или слова, слова русского языка, языка особенного. Как говорил выдающийся лингвист 19-ого века П.А.Лукашевич: «Нам не извинительно не ведать свойств своего языка». Что же это за свойства? Во-первых, как считает П.А.Лукашевич, русский язык — древнейший язык Человечества. Во-вторых, русский язык — единственный, язык, не подвергшийся изменению, или как пишет П.А.Лукашевич не подвергшийся чаромутью [1] (чары — буквы, мутье — мутить, термин П.А.Лукашевича). В третьих, наша Родная Речь является образной. Это означает следующее: слова формируются из слогов, слоги из буквиц (букв), а буквицы имеют образы. Далее, слоги как совокупность буквиц формируют более сложные образы, сами слова формируют ещё более сложные образы и, соответственно, смыслы. В книге Л.Н.Толстого [2] приводится азбука, состоящая из 36 букв-образов. Ещё ранее, славянские народы пользовались древлесловенской буквицей, состоящей из 49 буквиц, несущих 49 образов. Это и есть удивительные свойства нашей Родной Речи.

При помощи нашей Родной Речи мы можем извлекать смыслы слов из самих слов. Приведём простейшие примеры удивительных свойств нашей Речи. Проанализируем следующие простые слова: он — о (он) н (наш); она — о (он) н (наш) а (исток); мы — м (мыслящие) ы (едино); жизнь — жи (живое) знь (знание); знак — зна (знание) к (какое-то); автор — а (азы) втор (вторит), вещество — вещь (вещей) е (есть) ство (ствол); воздух — во (возле) з (земли) дух (дух), призма — при з (земле) м (мыслимый) а (исток). Можно сделать вывод, что наша Родная Речь наиболее полно и с минимальными искажениями описывает Мироздание. По-другому, можно сказать, что русский язык — язык учёных, изобретателей и творцов.

А что же с научной терминологией? Нас уверяют, что научные понятия либо латинского, либо греческого происхождения. В своей работе, я хотел указать на те математические понятия, которые прекрасно читаются по-русски. Нет сомнения, что эти понятия были изобретены людьми, которые говорили по-русски или на языке, который близок к современному славянскому языку, прежде всего, русскому, белорусскому, украинскому.

Итак, слово число раскладывается на два слога - чи (чин) сло (слово). Число — слово, подчинённое некоторому порядку. Особенно ярко порядок демонстрируется в книге Магницкого «Арифметика» [3], в которой используется славянское обозначение чисел. Можно назвать такой способ обозначения чисел **светлым способом**. Смотри рисунок.

Существует тёмный способ записи чисел или арапский. Согласно толкового словаря Владимира Ивановича Даля [4], арапский означает тёмный, арап — по племени чернокожий, чернотелый человек жарких стран, особенно Африки; мурын, негр. При Дворе, это должность, занимаемая иногда и белым служителем: придверник, припорожник. Арапа нельзя смешивать с арабом, аравитянином, как и производные: арапский, арабский и др. производными.

Ǻ	Ǫ	Ǿ	Ǫ	Ǿ	Ǻ	Ǻ	Ǿ	Ǻ
<i>аз</i>	<i>вѣди</i>	<i>глагѡль</i>	<i>добрѡ</i>	<i>есть</i>	<i>земѡ</i>	<i>земля</i>	<i>ѡже</i>	<i>фита</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
Ǿ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǿ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ
<i>и</i>	<i>како</i>	<i>люди</i>	<i>мыслѣте</i>	<i>наш</i>	<i>къи</i>	<i>он</i>	<i>покоѡ</i>	<i>червь</i>
<i>10</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>50</i>	<i>60</i>	<i>70</i>	<i>80</i>	<i>90</i>
Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ	Ǻ
<i>рцм</i>	<i>слово</i>	<i>твёрдо</i>	<i>ук</i>	<i>ферт</i>	<i>хер</i>	<i>пси</i>	<i>о</i>	<i>цы</i>
<i>100</i>	<i>200</i>	<i>300</i>	<i>400</i>	<i>500</i>	<i>600</i>	<i>700</i>	<i>800</i>	<i>900</i>

Арапские числа — это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Итак, можно сказать, что метод обозначения чисел при помощи букв азбуки именуется светлым способом. **Арапские** числа — это числа, записанные **тёмным способом**. Происхождение написания арапских чисел заключено в рукописной форме написания букв русского языка. А именно, в написании первых букв в словах: единица, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять.

Обратимся к подсказкам нашей Родной Речи, читаем «Арифметику» Магницкого. Этот автор использует слово глебус (устаревшее слово) = глобус (современное слово, изменённое), глебус (глеба, ус) — земля, покрытая усами. А что же означает слово **синус**? Цитируем В.И.Даль: «Синус матмат. отвес с конца дуги на луч (радиус)». **Синус** — это **отвес**! Синус — си (силы) н (небесной) ус. Синус — это силы небесной ус. Косинус — отрезок, идущий к синусу, то есть косинус. Арксинус — арка (или дуга) синуса, измеряемая в радианах.

Далее, раскрывая математические секреты при помощи русского языка можно установить также, что название числа $\pi = 3,14159\dots$ происходит от русского слова **питать**, а название числа $e = 2,71828\dots$ от русского слова **есть**, е (есть), с (слово), т (твёрдое), ь (роста), *e* — есть слово твёрдое роста.

В процессе обучения студентов следует иметь в виду, что Родную Речь, математику и естествознание следует воспринимать как единое целое. Разделение указанных предметов сводит на нет глубину восприятия нашего Мироздания.

Литература

1. Лукашевич П.А. *Чаромутіе, или священный язык магов, волхвов и жрецов, открытый Платоном Лукашевичем*. Петръгородъ, 1846.
2. Толстой Л.Н. *Новая азбука графа Л.Н.Толстаго*. Москва, 1875.
3. Магницкий *Арифметика*. Москва, 1703.
4. Даль В.И. *Толковный словарь живаго великорускаго языка*. т.1-4, издание книгопродавца-типографа М.О.Вольфа, Москва, С.-Петербург, 1880.

ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ «ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ БГУ

Г.П. Размыслович, А.В. Филиппов

Геометрия и алгебра являются основополагающими предметами всех математических дисциплин, изучаемых как в средней, так и высшей школе [1–8]. Поэтому учебный модуль «Геометрия и алгебра», включающий в себя дисциплины «Аналитическая геометрия», «Основы высшей алгебры» и «Линейная алгебра», в сфере математического высшего образования имеет как самостоятельное большое прикладное и теоретическое значение, так и тесную связь с многими другими математическими дисциплинами. Овладение студентом учебного материала в рамках модуля «Геометрия и алгебра» является необходимым условием для успешной учебы и последующей деятельности после окончания учебного заведения. Кроме того, в связи с переходом на четырехлетнее образование (бакалавриат) роль этого модуля еще более возрастает.

Исходя из многолетнего опыта преподавания дисциплины «Геометрия и алгебра» на кафедре высшей математики факультета прикладной математики и информатики БГУ был издан ряд учебных пособий по этой дисциплине. Теоретическую основу практически всех изданий составляет учебное пособие «Геометрия и алгебра», изданное в издательстве «Университетское» в 1987 г. (авторы Г.П.Размыслович, М.М.Феденя, В.М.Ширяев). Со времени выхода указанного учебного пособия прошло достаточно времени, чтобы оценить полезность этого издания для обеспечения учебного процесса. Однако за это время в образовательных стандартах и учебных планах специальностей системы высшего образования, и, следовательно, в учебных программах дисциплин алгебро-геометрического цикла произошли существенные изменения. Изменились также и учебные программы математических дисциплин в системе среднего образования.

В связи с этим авторами доклада, являющимися составителями типовых учебных программ по дисциплинам алгебро-геометрического цикла для специальностей факультета прикладной математики и информатики, разработано и подготовлено к изданию новое учебное пособие «Геометрия и алгебра». Отличительная особенность данного пособия от указанного выше состоит в том, что теоретический материал представлен в более современном виде, учитывающем изменения учебных программ и адаптированное для студентов младших курсов университетов. В нем содержится много примеров, иллюстрирующих теоретический материал. С учетом того, что разработанное пособие предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики, в нем представлено много практических методов и алгоритмов решения задач, а также примеров решения задач. Кроме того, в учебное пособие добавлена глава, содержащая элементы теории чисел, криптографии и теории кодирования.

Литература

1. Размыслович Г.П., Филиппов А.В. *Аналитическая геометрия. Учебные материалы для студентов фак. приклад. математики и информатики. В 2ч. Ч. 1. Системы координат. Векторы. Ч. 2. Линии и поверхности первого и второго порядков..* Минск: БГУ, 2022.
2. Размыслович Г. П., Феденя В.М., Ширяев В.М. *Геометрия и алгебра.* Минск: изд-во «Университетское», 1987.
3. Размыслович Г. П., Филиппов А.В., Ширяев В.М. *Геометрия и алгебра. Практикум: учебное пособие.* Минск: Вышэйшая школа, 2018.
4. Размыслович Г.П. *Геометрия и алгебра. Учебные материалы для студентов фак. приклад. математики и информатики. В 5 ч. Ч. 1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений. Ч. 2. Векторные пространства. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств. Ч. 4.*

Полиномиальные и нормальные формы матриц, Евклидово и унитарное пространства. Минск: БГУ, 2010, 2013, 2014.

4. Размыслович Г. П., Феденя М.М., Ширяев В.М. *Сборник задач по геометрии и алгебре* Минск: изд-во «Университетское», 1999.

5. Размыслович Г. П. *Элементы высшей алгебры. Учебные материалы для студентов фак. приклад. математики и информатики.* Минск: БГУ, 2015.

6. Ширяев В. М. *Элементы теории чисел. Учебные материалы для студентов фак. приклад. математики и информатики.* Минск: БГУ, 2015.

7. Васильковский М. М. *Криптографические системы с открытым ключом: учебные материалы для курсантов воен. фак. БГУ. В 2 ч.* Минск: БГУ, 2022.

8. Базылев Д.Ф. и др. *Сборник задач по прикладной алгебре: для студентов факультета прикладной математики и информатики.* Минск: БГУ, 2011

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Г.А. Расолько, Е.В. Кремень, Ю.А. Кремень

Применение систем компьютерной математики (СКМ) и компьютерных технологий при изучении дисциплин высшей математики представляет собой один из видов педагогических технологий. Оно позволяет, не отказываясь от принципов фундаментальности классического образования, качественно изменить подходы и методы изложения материала, сделать его более наглядным и доступным, а следовательно, более интересным и привлекательным для основной массы обучающихся. На данном этапе развития технологий образования в нашей стране именно применение современных компьютерных методов и систем оставляет желать лучшего. Частично это связано с объективными причинами (дороговизна оборудования, программных продуктов и т. д.), однако часто и с субъективными – нежеланием что-либо менять.

Ранее коллективом авторов – доцентов БГУ – были изданы учебно-методические пособия [1, 2], посвящённые внедрению СКМ в курсы «Математический анализ», «Численные методы», «Функциональный анализ», «Теория вероятностей», «Математическая статистика».

Далее были изданы учебные пособия [3-5], соответствующие учебным программам курсов «Дифференциальные уравнения», «Аналитическая геометрия» и «Численные методы», посвящённые вопросам внедрения практики использования пакета MathCAD в фундаментальные курсы вузовской математики. Практика их использования при проведении лабораторных занятий и УСР показала, что продуманная методика преподавания математики позволяет сочетать особенности математики как науки и как учебного предмета в процессе математической подготовки студентов в классическом университете.

Если обратиться к курсу «Дифференциальные уравнения», то очевидно, что изучение дифференциальных уравнений преследует две основные цели: дать студентам базу, необходимую для усвоения материала предметов аналитического цикла, предусмотренных учебными планами, и сформировать составную часть банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы. С теоретической точки зрения, рассматриваемые методы интегрирования достаточно просты и их применение основано на четких и понятных алгоритмах. Однако, практическое их использование иногда требует выполнения большого объема вычислений и аналитических преобразований, например, при применении метода неопределенных коэффициентов для построения решений неоднородных стационарных линейных

уравнений. Широкие возможности, которыми обладают в этом плане современные СКМ, позволяют, в определенной мере, решить эту проблему. Так, например, использование MathCad дает возможность не только найти аналитические или численные решения дифференциальных уравнений, но осуществить и визуализацию полученных результатов, построить поле наклонов уравнения, эскизы графиков интегральных и фазовых кривых. Это хорошо отражено в учебном пособии [4].

В 2021-2022 учебном году в рамках учебной практики студентам второго курса научно-педагогического потока ММФ БГУ в качестве одного из творческих заданий было предложено рассмотреть и подготовить одну из тем по дифференциальным уравнениям с использованием СКМ Mathcad. Целью задания было дать возможность будущим педагогам комплексно взглянуть на полученные ими знания по дифференциальным уравнениям, информатике, программированию и методике преподавания и предложить свое видение, как использование современных компьютерных технологий может изменить преподавание дифференциальных уравнений. Были сформированы творческие коллективы.

Нужно было: 1) изложить классический лекционный материал, сохраняя «магию» вывода математических формул, без использования мела и доски; 2) продемонстрировать решение типичных задач по заданной теме, обычно решаемых на лабораторных занятиях, но уже используя СКМ Mathcad; 3) оформить результат своей работы в виде ролика, который был бы востребован как для самостоятельного изучения рассмотренной темы другими студентами, так и для использования преподавателем на занятии. Подбирался необходимый теоретический и практический материал из учебного пособия [4], выстраивалась последовательность изложения материала (сценарий) и выбирались необходимые компьютерные средства для изложения этого материала. Созданные работы можно посмотреть на YouTube в плейлисте <https://www.youtube.com/playlist?list=PL84ESW5WdEfKYCo4kK36b5EmU2gjIyaY>.

Перечислим эти группы и рассмотренные ими темы: Батяновская Е. и Шпуников П. «Метод неопределённых коэффициентов для линейных голоморфных уравнений в MathCad»; Веренич К. и Кисель А. «Уравнения с разделяющимися переменными»; Можилловская А. и Ярохович А. «Линейные уравнения с постоянными коэффициентами»; Бань А. и Ксёнда П. «Уравнение Бернулли»; Зарожный А. «Определение типа точки покоя»; Бирюк А. и Иванов Т. «Уравнение в полных дифференциалах»; Соколовский Г. и Мацко К. «Метод Пикара последовательных приближений для решения дифференциальных уравнений»; Кашуба Ю. и Мартыанова В. «Интегрирующий множитель»; Гурбо Е. «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»; Оразов Атамырат (Туркменистан), Гулсапаров Ыхлас (Туркменистан), Хомицевич Даниил (Беларусь) «Базис пространства решений».

Результаты своей работы студенты представили на ежегодной студенческой конференции.

Будущие педагоги на механико-математическом факультете БГУ уже вовлечены в процесс совершенствования учебно-методического обеспечения при изучении математики. Упомянутые выше студенты будут распределяться по учебным заведениям и они готовы к переменам, открыты для новшеств и могут достойно влиться в учебные коллективы.

Использование систем компьютерной математики на практических занятиях по дифференциальным уравнениям не является самоцелью и никоим образом не может полностью заменить традиционные методы обучения. Однако, применение таких систем облегчает восприятие студентами материала, позволяет рассмотреть гораздо больше при-

меров, больше времени уделить качественному анализу получаемых результатов. Все это способствует, на наш взгляд, более полному усвоению тем курса, прививает навыки использования систем компьютерной математики в практической работе.

На современном этапе в связи с бурным внедрением компьютерных технологий в учебный процесс, описанный метод обучения может повысить мотивацию студентов по изучению не простых предметов высшей школы.

Заключение. Хотим отметить, что методика преподавания математических дисциплин в высшей школе в условиях всеобщей цифровизации претерпевает глобальные изменения. Формирование математической компетентности студентов в настоящее время должна строиться с учетом междисциплинарной интеграции, а конструирование учебного процесса происходить с использованием современных цифровых технологий.

Литература

1. Расолько Г. А., Кремень Ю.А., Бровка Н.В., Третьякова Л.Г. *Использование информационных технологий в курсе вузовской математики. В 3-х частях. Часть 1. Решение задач в пакете MathCad. Учеб.-метод. пособие.* Минск : БГУ, 2010.
2. Расолько Г. А., Кремень Е.В., Кремень Ю.А., Третьякова Л.Г. *Использование информационных технологий в курсе вузовской математики. В 3-х частях. Часть 2. Решение задач в пакетах MathCad и Mathematica. Учеб.-метод. Пособие.* Минск : БГУ, 2011.
3. Кремень Е. В., Кремень Ю.А., Расолько Г.А. *Численные методы. Практикум в MathCad.* Минск : Вышэйшая школа, 2019.
4. Альсевич Л. А., Мазаник С.А, Расолько Г.А., Черенкова Л.П. *Дифференциальные уравнения. Практикум.* Минск: Вышэйшая школа, 2012.
5. Расолько Г.А., Кремень Ю.А. *Аналитическая геометрия. Практикум с использованием Mathcad.* Минск : Вышэйшая школа, 2019.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ, КОМПЕНСИРУЮЩАЯ ПРОБЕЛЫ ОБРАЗОВАНИЯ АБИТУРИЕНТОВ

Ю. М.Сметанин, Л. П. Сметанина

В конце 19 века членом – корреспондентом Петербургской академии наук Гончаровым И. А. важнейшим вопросом русской жизни был поставлен университетский вопрос. Этот вопрос был актуализирован в РФ в начале 21-го века в форме предостережения о возможных невосполнимых потерях в процессах воспроизводства культуры нашей цивилизации [1]. Этот вопрос актуален и сейчас при уходе из Болонской системы.

Культура в череде смены поколений передается путем передачи четырех составляющих социального опыта:

- 1) системы знаний о природе, обществе, мышлении, технике, способах деятельности;
- 2) системы общих интеллектуальных и практических умений и навыков;
- 3) опыта творческой деятельности;
- 4) опыта эмоционально-ценностного отношения к миру в дихотомии (хорошо-плохо).

Усвоение этих составляющих невозможно без изучения физико-математических дисциплин. Качество подготовки специалистов зависит от интеллектуального потенциала поступающих и обучающихся естественно-научным и техническим специальностям. Диагностика уровня понятийного и логического мышления, в сравнении второй половины 80-х годов прошлого века с настоящим временем, свидетельствуют о значительном его снижении у молодежи, поступающей в вузы [2]. Главными причинами являются: недостаточная квалификация учителей и нежелание математических кафедр при составлении

планов занятий учитывать уровень подготовки абитуриентов. Для периферийных вузов ситуация усугубляется тем, что лучшие выпускники школ предпочитают учиться в центре, что влечет увеличение доли абитуриентов с низкими показателями ЕГЭ по физике и математике. Часто для поступления выбирают гуманитарные вузы не потому, что интересуют набор их профессий, а потому, что они не подготовлены для полноценного овладения математикой и физикой. Уровень математической подготовки выпускников школы продолжает падать. Объектно-ориентированный взгляд на мир, формирующий понятийное мышление, является следствием изучения, прежде всего, естественных наук. Все знания формируются на основе систематизированной совокупности понятий. Знания - это деятельность, оцененная с точки зрения ее результата. Поэтому усвоение и систематизация новых понятий в процессе обучения любой дисциплине должно с необходимостью приводить к формированию четырех основных взаимосвязанных видов умений использования знаний: типовые учебные умения, умение решать типовые предметно - специфические задачи, логические умения, творческие умения.

Первый компонент, необходимый для формирования понятийного мышления, базируется на умениях осуществлять общие приемы учебной работы и на их основе воспринимать и отрабатывать типовые приемы решения предметных задач. Второй компонент мышления — это логика, то есть умение выделять причинно-следственные связи. Владеющий ею человек может обосновать свои тезисы, может спрогнозировать развитие ситуации, понимает, что за чем и из чего следует. Если логическое мышление не сформировано, человек механически заучивает правила осуществления деятельности, продолжает делать ошибки. Третья основа эффективного мышления – это умение систематизировать и обобщать информацию, осуществлять перенос освоенных приемов на новые ситуации (строить эвристические приемы решения), творить новое знание. Также это умение строить логические структуры и в результате обладать целостным представлением о предметной области деятельности. Способами применения средств логического мышления при решениях задач служат рассуждения. Выделяются базовые логические действия: сравнение, анализ, абстракция, обобщение, конкретизация. К базовым также относятся составные логические операции (построение отрицания, утверждение и опровержение как построение рассуждения с использованием различных логических схем - индуктивной или дедуктивной и, самое главное, умение рассуждать в терминах необходимости, достаточности, необходимости и достаточности. Эти последние, по мнению И.П. Калошиной, являются важнейшим типом методологических знаний для разработки способов решения творческих задач [3, стр. 344].

Рассмотрим, какие методические средства может противопоставить этим тенденциям отдельно взятая кафедра, обучающая математике студентов инженерных специальностей на примере Института нефти и газа УдГУ.

Интеллектуальный уровень абитуриентов значительно понизился по сравнению с 90-ми годами прошлого века, конкурс упал. Задача заключается в достижении сразу нескольких весьма важных целей:

- мотивации студентов и повышении учебной дисциплины;
- повышении интенсивности самостоятельной работы и улучшение способов ее контроля;
- ликвидации пробелов в логической составляющей умений студентов

Поступившие в ИНиГ УдГУ студенты проходят входное тестирование, на основании которого им выдаются индивидуальные задания, выполнение которых выравнивает уровень школьной подготовки. Подготовлен и издан комплект методических разработок по основным разделам курса математики. Он доступен в системе электронного обучения

УдГУ. Для повышения мотивации используются индивидуальные расчетные задания и тесты для набора баллов в БРС. Тесно работаем с деканатом, чтобы не допускать пропусков занятий. По проблемным темам курса математики записаны видеолекции и видео практических занятий, которые преподаватель раздает через систему электронного обучения либо через свой Яндекс диск. В видео лекциях и практических занятиях осуществляются подробные доказательства, разбор новых понятий и связей между ними для отработки средств логического мышления, а также решение предметных задач.

Системный кризис массового высшего образования этими мерами, конечно, не остановить, но свой маневр на своем уровне мы понимаем [4,5].

Литература

1. *Образование, которое мы можем потерять*. Сборник. Под общей редакцией ректора МГУ академика В. А. Садовниченко. Изд. 2-е, дополненное. Москва: МГУ им. М. В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований.

2. Ясюкова Л. А., Долгополов В. А., Пискун О. Е. *Интеллектуальный потенциал студентов СПбГУ*. Сборник Здоровье-основа человеческого потенциала: проблемы и пути их решения. Vol. 8 iss. 1. С. 219-222.

3. Калошина И. П. *Психология творческой деятельности*.: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

4. Сметанин Ю. М., Сметанина Л. П. *Образование в эпоху перемен // Региональные вузы – драйверы пространственного развития России : материалы Всерос. с междунар. участием науч.-практ. конф., посвящ. 90-летию Удмуртского государственного университета, 19 ноября 2021 г. М-во науки и высш. образования РФ, М-во образования и науки УР, ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет* С. 135-145. URL: [http : //elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/21015](http://elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/21015)

5. Сметанин Ю. М., Сметанина Л. П. *Логические аспекты информационно-аналитической работы (как сложить мозаику) // Современные проблемы профессионального образования: опыт и пути решения: материалы Пятой Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, приурочен. к 90-летию Иркутск. нац. исследоват. техн. ун-та и к 45-летию Иркутск. гос. ун-та путей сообщения. - Иркутск : Изд-во ИрГУПС, 2020. - С. 517-521. URL: [http : //elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/19871](http://elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/19871)*

ОРГАНИЗАЦИЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ НА ОСНОВЕ ПРОБЛЕМНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Е.Л. Старовойтова

Качественная подготовка специалистов, обладающих глубокими и гибкими профессиональными знаниями и умениями, способных к решению основных задач в той или иной сфере деятельности, во многом определяется эффективностью учебного процесса. Его организация требует особого внимания с точки зрения формирования и развития навыков самообразования, самоорганизации и самоконтроля у будущего специалиста, приобщения его к самостоятельной деятельности по усвоению постоянно увеличивающегося потока новой информации. Это предполагает соответствующее методическое и методологическое обеспечение образовательного процесса в высшей школе, обеспечивающее, в частности, активизацию учебно-познавательной деятельности студентов. Одной из отличительных особенностей активного обучения от традиционного является вовлечение в активный познавательный процесс всех обучающихся без исключения, активизация мыслительной деятельности каждого из них по применению имеющихся знаний с четким осознанием того, где, каким образом и для каких целей эти знания могут быть применены. Учет индивидуального вклада каждого в решение поставленной проблемы

осуществляется за счет активного обмена знаниями, идеями, способами деятельности посредством создания преподавателем специальных условий. К ним, в первую очередь, относится совершенствование форм и методов обучения. Активная познавательная деятельность студента при изучении математики приводит к формированию умения мыслить творчески, использовать в процессе деятельности приобретенные профессиональные компетенции.

Одним из направлений обеспечения активности студентов при изучении математических дисциплин в техническом вузе является применение активных методов обучения [1]. Среди них особо выделяются проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод как элементы проблемного обучения, реализуемые на лекционных занятиях, и поисковая деятельность (ее элементы), используемые на практических занятиях и при самостоятельной работе, в том числе, и при решении прикладных задач. Проблемное обучение предполагает особую организацию учебных занятий на основе предварительно созданных преподавателем проблемных ситуаций. Проблемная ситуация, как указывает Матюшкин А.М., характеризуется как психическое состояние интеллектуального затруднения, которое возникает перед обучающимся в результате постановки задания, вызывающего необходимость и потребность в новом знании [2]. Такое состояние приводит обучающихся к активной самостоятельной деятельности по разрешению ситуации, результатом которой является творческое применение известных знаний в новых условиях. Это дает возможность формулировать выводы и обобщения, совершенствовать умения и навыки, развивать мыслительные способности и личностную мотивацию учения в соответствии с индивидуальными возможностями обучающихся.

Реальное состояние математической подготовки студентов в техническом вузе, обусловленное рядом объективных и субъективных причин, ограничивает возможности применения проблемного обучения в изучении математических дисциплин. Поэтому практическая сторона рассматриваемого подхода позволяет использовать четыре уровня проблемного обучения с соответствующей характеристикой активности для каждого уровня [3]. В соответствии с выделенными уровнями представим далее типы проблемных ситуаций и способы их выявления на лекциях и практических занятиях. Информационная (традиционная) лекция в форме воспроизведения теоретического материала позволяет излагать новый для студента материал в доступной для него форме, с опорой на предыдущие темы. Большой объем информации дается за более короткий промежуток времени, у студента формируется логика мышления, умение выделять главное, видеть внутрисубъектные связи различных разделов математики. Но такая лекция не содержит возможности творческого развития умственной деятельности студента, она проходит в режиме пассивного познания. Лекция с элементами совместного со студентами обсуждения проблемных ситуаций эффективнее как по уровню предъявления содержания, так и в плане ее восприятия. Усвоение теоретических знаний активизирует механизмы развития теоретического мышления, способствуя формированию познавательного интереса к содержанию учебной дисциплины, профессиональной мотивации и творческого мышления. Создание проблемной ситуации на лекции может быть достигнуто различными способами. Например, при введении понятия определенного интеграла как предела интегральных сумм можно изложение материала построить на примере решения задачи о давлении жидкости на стенку сосуда: «Найти давление воды на прямоугольную стену бассейна с основанием прямоугольника, равным a , и высотой H ». В ходе обсуждения и решения этой задачи дается определение определенного интеграла от функции $F(h)$ на отрезке $[0; H]$, вводится соответствующее обозначение, совместно со студентами новое понятие обобщается на произвольную непрерывную функцию $F(x)$ и отрезок $[a; b]$.

Проблемные ситуации на практических занятиях возникают при общей постановке задачи, при составлении и реализации плана ее решения, при формулировании результата и проверке решения. Рассматривая приложения определенного интеграла, можно создать проблемную ситуацию на содержании следующей задачи: «Палуба корабля длиной 80 м и шириной в центре 20 м представляет две пересекающиеся параболы. Сколько краски надо для ее покрытия, если на каждый квадратный метр необходимо 0,3 кг краски?» Задача предполагает вычисление площади сложной фигуры, что в будущей практической деятельности связывается с прогнозированием материальных затрат. Очевидно, что не всякая задача может быть проблемной ситуацией. Для проблемной ситуации характерно наличие трех главных компонентов: а) необходимость выполнения такого действия, при котором возникает познавательная потребность в новом, неизвестном отношении, способе или условии действия; б) неизвестное, которое должно быть раскрыто в процессе решения проблемной ситуации; в) возможности учащегося в выполнении поставленного задания, в анализе условий и открытий неизвестного [2].

Организации активного обучения студентов математике в техническом вузе на основе проблемных ситуаций требует от преподавателя не только направленной разработки содержания проблемных ситуаций, но и определение методики работы с ними при учете уровня математической подготовки студентов и их опыта в самостоятельном поиске решения конкретных практических задач.

Литература

1. Смолкин А. М. *Методы активного обучения: научно-методическое пособие* Москва: Высшая школа, 1991.
2. Матюшкин А.М. *Психология мышления: мышление как разрешение проблемных ситуаций: учебное пособие*. Москва: КДУ, 2009.
3. Махмутов М.И. *Проблемное обучение: основные вопросы теории: монография*. Москва: Педагогика, 1975.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ТРАНСПОРТНЫХ КОММУНИКАЦИЙ БНТУ

С. В. Чернявская, М. А. Хотомцева (БНТУ, Минск)

Математическое образование как обязательный компонент инженерного образования играет существенную роль в подготовке квалифицированных и конкурентоспособных работников. От глубины усвоения математических дисциплин на первых двух курсах зависит усвоение специальных дисциплин, обеспечивающих достижение профессиональных компетенций.

Перечислим основные проблемы первого семестра, характерные для студенческого контингента ФТК:

1. Разный уровень математической подготовки студентов, наличие у некоторых учащихся значительных пробелов в знаниях; нехватка необходимых математических навыков.
2. Слабая мотивация в изучении математических дисциплин, как сложных для понимания, требующих напряжения умственных сил и существенных временных затрат для подготовки к занятиям.
3. Недопонимание значимости этих дисциплин в дальнейшем освоении инженерных дисциплин.

4. Недостаток самодисциплины и привычки к систематической учебной деятельности.

Еще одна группа проблем связана с особенностями современного этапа учебного процесса, а именно, переход на трех- или двухсеместровый курс обучения математике вместо четырёх семестрового при сохранении программы обучения примерно того же тематического наполнения, уменьшение количества часов аудиторных занятий, отсутствие в нагрузке преподавателей часов, выделенных на проверку индивидуальных заданий, расчетно-графических и других форм самостоятельных работ по предмету с последующей их защитой, а также часов для индивидуальных консультаций.

С учетом перечисленных проблем сформулируем некоторые направления деятельности преподавателей математики по организации учебного процесса в первом семестре обучения. Эти действия направлены на скорейшую адаптацию студентов к условиям обучения, выравнивание уровня знаний студентов до средних показателей, предупреждение появления академической задолженности, развитие интереса к предмету с помощью практико-ориентированных заданий, привлечение наиболее мотивированных студентов к исследовательской деятельности.

1. Организация тестового контроля знаний студентов.

В течение первой недели учебных занятий проводится входной контроль (в тестовой форме) уровня знаний для определения контингента студентов, которым необходима «скорая математическая помощь». Задания для входного контроля включают задачи на применение базовых математических умений и навыков, таких как: вычисление значений числовых выражений; упрощение выражений, содержащих степени, корни и модули; решение линейных и квадратичных уравнений и неравенств; применение свойств функций; работу с графиками функций и т. п.

С третьей недели первого семестра организуется проведение адаптационных занятий по математике со студентами, показавшими уровень знаний ниже пороговой отметки по результатам входного контроля. Занятия проводятся в течение трех с половиной первых месяцев обучения по разработанным программам, которые учитывают особенности курса математики для той или иной специальности. На адаптационных занятиях повторяются основы элементарной математики и решаются задания, составленные с учетом параллельно изучаемого вузовского курса математики.

В середине семестра проводится второй этап мониторинга для определения уровня знаний, полученных студентами в процессе освоения университетского курса математики. В задания этого этапа включают задания по темам, пройденным согласно учебным программам к моменту проверки. Результаты мониторинга доводятся до преподавателей для своевременного принятия мер по корректировке методики работы. Нужно отметить, что результаты второго этапа мониторинга оказываются выше результатов входного тестирования.

Перед изучением нового раздела курса планируется проводить так называемые «диагностические тесты готовности». Они проверяют знание математических понятий и владение навыками, которые будут востребованы при изучении непосредственно нового раздела. Выполнение теста готовности рассчитано на 20 минут, количество задач в нем составляет от 10 до 15. Задания предлагаются с вариантами ответов. Тесты дают детальную картину готовности к изучению нового материала для каждого студента, позволяют преподавателю корректировать стиль преподавания в соответствии с особенностями отдельных студентов, чтобы помочь более слабым ученикам лучше справиться с курсом.

2. Повышение мотивации студентов к изучению математики

Преподаватели математики ищут новые формы и методики изложения математических знаний, используя возможности современных компьютерных технологий. В учеб-

ный процесс внедряются электронные учебно-методические комплексы по различным разделам дисциплины, содержащие тексты лекций с необходимой визуализацией для лучшего понимания и позволяющие студенту осваивать новые знания в индивидуальном режиме. В эти учебные комплексы входят тренировочные, практические и проверочные задания, онлайн уроки и другие материалы, образующие единое обучающее пространство, которое помогает студенту получить устойчивые знания и необходимые навыки. Благодаря таким методическим комплексам лекция или практическое занятие может превратиться в активный диалог преподавателя со студентами.

Из используемых в учебном процессе приложений компьютерной математики отметим графический калькулятор Desmos, реализованный как мобильное приложение. Он очень удобен для использования на практических занятиях для построения графиков явных, неявных и параметрически заданных функций в декартовой и полярной системах координат. Студенты получают возможность в своих мобильных телефонах проиллюстрировать аналитическое решение, изучить свойства графиков функций, изменяя параметры. В преподавании и организации самостоятельной работы широко используется кроссплатформенная динамическая математическая программа GeoGebra.

Для построения различных типов плоских и пространственных кривых и поверхностей, заданных явно, неявно и параметрически используется CalcPlot3D. Этот инструмент предназначен для динамической визуализации и изучения многомерного дифференциального и интегрального исчисления.

Еще одной формой повышения мотивации к изучению математики является исследовательская работа с талантливыми или наиболее успевающими студентами. Для постановки практической задачи осуществляется взаимодействие с педагогами профильных кафедр факультета, таких как «Геодезия», «Автомобильные дороги». «Мосты и тоннели». Ребята видят, что математические методы являются фундаментом для решения инженерных задач по их будущим специальностям в области строительства транспортных коммуникаций. Для таких студентов на факультете организуются научно-практические студенческие конференции и их исследовательские работы публикуются в сборниках научных студенческих работ.

ADVANTAGES OF LABORATORY WORK ON APPLIED DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

A.I. Egamov

In the sixth semester of study in the direction of FIIT (02.03.02) at the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, students study the subject "Computational methods". In the working program of disciplines it is written that they need to perform laboratory work on one or two topics covered at the discretion of the teacher. Recently, students have been particularly interested to laboratory work on the topic "Solving an applied discrete optimization problem". It sets the task of processing sugar beet in the form of a mathematical model for processing a fixed number of batches of perishable raw materials. This topic is especially relevant for the Nizhny Novgorod region in connection with the ongoing modernization of the Sergach Sugar Factory, carried out by decree of the Government of the Russian Federation, and the participation of Nizhny Novgorod State University in the development of intelligent data processing systems and software for this modernization. The proposed problem can be reduced to a well-known discrete optimization problem: the assignment problem [1]. To solve it in the middle of the 20th century, a "hungarian algorithm" was specially developed.

This laboratory work has some advantages over others.

1. The methods of solving the problem are close to the school apparatus of mathematics.
2. When numerically solving a problem, the main difficulty in writing a program is "hidden" in the library of routines used by the algorithmic language "Python". In subroutine libraries "scy.py" and "Munkres" there is a subroutine of the "hungarian algorithm".
3. The correctness of the program and the truth of the results obtained are easily verified, including the verification is carried out visually according to the graphs of functions.
4. The problem relates to applied problems that directly show the connection between theoretical and practical mathematics.

The statement of the problem and the problems arising in connection with its solution can be found in [2–4]. In their works, students explore new heuristic processing algorithms, evaluate the effectiveness of heuristic quasi-optimal algorithms for processing sugar beet in relation to the theoretically calculated maximum possible sugar yield.

Acknowledgement. The article was carried out under the contract No SSZ-1771 dated 22.04.2021. on the implementation of R&D on the topic: "Creation of high-tech sugar production on the basis of JSC "Sergach Sugar Plant within the framework of the Agreement on the provision of subsidies from the federal budget for the development of cooperation between the Russian educational organization of higher education and the organization of the real sector of the economy in order to implement a comprehensive project to create high-tech production No. 075-11-2021-038 of 24.06.2021. (IGC 000000S407521QLA0002).

References

1. Bunday B., Arnold E. *Basic linear programming*. London Baltimore, Md., USA. 1984.
2. Balandin D. V. [and etc.] *Mathematical Modelling and Optimization of Scheduling for Processing Beet in Sugar Production* // Communications in Computer and Information Science, 2022. V. 1750. P.227–238.
3. Balandin D. V. [and etc.] *Educational and Research Project вЪн Optimization of the Sugar Beet Processing Schedule* // Supercomputing. Lecture Notes in Computer Science, book series (LNCS, volume 13708). 2022. P.409–422.
4. Balandin D. V., Kuzenkov O. A., Egamov, A. I. *Estimating the efficiency of quasi-optimal strategies for sugar beet processing.* // Eurasian Union of Scientists. Series: Technical, Physical and Mathematical Sciences. 2022. 9(102). 33–39.

АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

- Авлас А.Н.* sdilav@tut.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 94.
- Агаркова Н.Н.* agarkova_n@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 3.
- Акимов В.А.* vakim50@mail.ru. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 4.
- Андрушкевич И.Е.* racursj@yandex.ru. Институт бизнеса БГУ, Минск, Беларусь. С. 6.
- Астровский А.А.* aastrov53@gmail.com. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 73.
- Афанасьева Е.Б.* afanaseva@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 8.
- Баровик Д.В.* barovikd@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 106.
- Басик А.И.* alex-basik@yandex.ru. Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Брест, Беларусь. С. 10.
- Бекиев А.Б.* ashir1976@mail.ru. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, математический факультет, Нукус, Узбекистан. С. 29.
- Березкина Л.Л.* berezkina.l51@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.
- Бондарь Л.Н.* b_lina@ngs.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 14.
- Булатов В.И.* bulatov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 121.
- Бусалов А.А.* busalov89@mail.ru. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. С. 50.
- Вакульчик В.С.* v.vaculchik@psu.by. Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 141.
- Васильев В.Б.* vbv57@inbox.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 3, 8.
- Васьковский М.М.* vaskovskii@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 62.
- Веденягин В.В.* vicveden@yahoo.com. ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия. С. 75.
- Волков В.М.* v.volkov@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76.
- Володченкова Л.А.* volodchenkova2007@yandex.ru. Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия. С. 77.
- Воронова Н.П.* vm3_ftk@bntu.by. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 123.
- Вувуникян Ю.М.* vuv64@mail.ru. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 78.
- Гарипов И.Б.* ilnur_garipov@mail.ru. Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия. С. 11.
- Глецевич М.А.* gletsevich.marina@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 124.
- Гринчик Н.Н.* nngryn@yandex.ru. Институт тепло- и массообмена имени А.В.Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 81.

Грицук Е. В. gricuk_e@tut.by. Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 10.

Громько Г. Ф. grom@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 85, 94.

Гуц А. К. aguts@mail.ru. Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр Российской академии наук», Сочи, Россия. С. 77.

Дайняк В. В. dainyak@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 12, 126.

Демиденко Г. В. demidenk@math.nsc.ru. Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 14.

Денисов А. И. den_tspu@mail.ru. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тула, Россия. С. 16.

Денисов И. В. den_tspu@mail.ru. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тула, Россия. С. 16.

Деревяго А. Н. dzeraviahaAN@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 127, 130.

Джакаева К. Д. djakaeva71@mail.ru. Каракалпакский государственный университет академический лицей. С. 93.

Дун Цзинхуэй mmf.dunC1@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 83.

Егоров А. А. andreyegorov69@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 127.

Елгондиев К. К. elgondiev61@gmail.com. Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 16.

Ерофеев В. Т. bsu-erofeenko@tut.by. Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики, БГУ, Минск, Беларусь. С. 85.

Жук А. И. aizhuk85@mail.ru. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 43.

Завистовская Т. И. t.zavistouskaya@psu.by. Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 141.

Задорожняк А. О. a_zadorozhnyuk@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 44.

Защук Е. Н. shvichkina@tut.by. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 43.

Зяц Г. М. zayats@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 81, 85.

Зеленков В. И. zelenkovvi@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 132.

Ибадуллаева И. Н. 720564@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 3.

Ивашкевич А. В. ivashkevich.alina@yandex.by. Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 88, 89.

Игнатенко М. В. ignatenkomv@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 45.

Ильинкова Н. И. n.ilyinkova52@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 135.

Ильющенко А. Ф. alexil@mail.belpak.by. Институт порошковой металлургии имени академика О. В. Романа, Минск, Беларусь. С. 94.

Каландия Е.И. kaf_teorfun@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 48.

Калнин А.В. avk@mm.unn.ru. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. С. 50, 52.

Карпиеня М.В. karpiyeniaMV@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 91.

Кастрица О.А. kastritsa@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 136.

Качаловская Е.И. katerina.kulgun@gmail.com. Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь. С. 76.

Каянович С.С. Kayanovichs@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 18.

Кечко Е.П. ekechko@gmail.com. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 59.

Ковнацкая О.А. Kovnatskaya@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 19.

Козловская И. С. kozlovskaja@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 22.

Кононова О.А. KonanovaOA@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 130.

Корзюк В. И. korzyuk@bsu.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 19, 22, 37.

Королёва О.М. korolyovaola@gmail.com. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 110.

Кремень Е.В. kremenev@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 149.

Кремень Ю.А. kremenya@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 149.

Курбанбаев О.О. otebay58@mail.ru. Каракалпакский государственный университет им. Бердаха. С. 93.

Лаптинский В. Н. lavani@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 25.

Лешок А.В. sdilav@tut.by. Институт порошковой металлургии имени академика О.В. Романа, Минск, Беларусь. С. 94.

Ломовцев Ф.Е. lomovcev@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 34.

Лукинова О.Ю. lukinova@bsu.edu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 8.

Лысак В.В. lysak@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 143.

Мавлявцев Р.М. mavly72@mail.ru. Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия. С. 11.

Магонь Н.С. natalimahon@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.

Мазаник С.А. smazanik@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 136.

Майоровская С.В. svmayor@mail.ru. Белорусский государственный экономический университет. С. 137.

Марченко И.В. marchenko@msu.by. Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова, Могилёв, Беларусь. С. 139.

- Мателенок А.П.* a.matelenok@psu.by. Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 141.
- Мацука Н.П.* matsuka@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 94.
- Машинец А.А.* anastasia.kho@yandex.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 8.
- Метелева В.Е.* vemetelva@gmail.com. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. С. 52.
- Миронова Л.Б.* lbmironova@yandex.ru. Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт (филиал), Елабуга, Россия. С. 28.
- Мисиук В.Р.* misiuk@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 54.
- Мороз О.А.* vm3_ftk@bntu.by. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 123.
- Новичкова Д.А.* navichkovad@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 142.
- Нуржанов О.Д.* nurjanov@list.ru. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 55.
- Оснач Т.М.* osnach@gsu.by. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 57, 59.
- Отарова Ж.А.* j.otarova@mail.ru. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 29.
- Панов Е.Ю.* eugeny.panov@novsu.ru. Новгородский государственный университет им. Я. Мудрого, ООО Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия. С. 30.
- Паньков А.В.* a.pankov@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 100.
- Переварюха А.Ю.* madelf@rambler.ru. Санкт–Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт–Петербург, Россия. С. 96.
- Прокашева В.А.* prover@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 143.
- Проневич А.Ф.* pranevich@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 99.
- Радыно Н.Я.* mir@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 145.
- Размыслович Г.П.* razmysl@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 147.
- Расолько Г.А.* rasolka@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 143, 149.
- Редьков В.М.* v.redkov@ifanbel.bas-net.by. Институт физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 88, 89.
- Русилко Т.В.* tatiana.rusilko@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 100.
- Рушинова И.И.* Rushnova@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 127, 135.
- Рябченко Н.В.* nmankevich@tut.by. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 57.
- Сабатулина Т.Л.* tlsabatulina@list.ru. Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия. С. 102.
- Скворцова М.А.* sm-18-nsu@yandex.ru. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 104.

- Сметанин Ю. М.* smetanina.l.p@udsu.ru. Институт математики информационных технологий и физики УдГУ, Ижевск, Россия. С. 151.
- Сметанина Л. П.* gms1234gms@rambler.ru. Институт математики информационных технологий и физики УдГУ, Ижевск, Россия. С. 151.
- Старовойтов А. П.* svoitov@gsu.by. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 57, 59.
- Старовойтова Е. Л.* stelle@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 153.
- Статкевич С. Э.* sstat@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 105.
- Столярчук И. И.* ivan.telkontar@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 32.
- Танирбергенов М. Б.* tanirbergenovmuratbek384@gmail.com. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан) . С. 61.
- Таранчук В. В.* taranchuk@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 106.
- Трифонова И. В.* irinat@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 78.
- Тюхтина А. А.* tyukhtina@iee.unn.ru. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. С. 50, 52.
- Устилко Е. В.* ustilko@tut.by. Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь. С. 34.
- Филитова Н. К.* kittennelli@gmail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.
- Филипцов А. В.* filiptsov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 147.
- Фимин Н. Н.* oberon@kiam.ru. Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация. С. 108.
- Хотомцеа М. А.* . Белорусский национальный технический университет. С. 155.
- Фирсов М. А.* firsov23@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 62.
- Чеб Е. С.* cheb@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 126.
- Чернявская С. В.* lana1964klepa@gmail.com. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 155.
- Чехменок Т. А.* Tchekhmenok@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 135.
- Чечеткин В. М.* chechetv@gmail.com. Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация. С. 108.
- Чуйко М. М.* chuiko@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 110.
- Чэнь Ваньли* . Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 78.
- Шеметова В. В.* valentina501@mail.ru. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия. С. 35.
- Шилин А. П.* a.p.shilin@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 65, 124.
- Шушкевич Г. Ч.* gsys@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 113.
- Эберлейн Н. В.* eberlein92@mail.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 3.

Dryuma V. valery@dryuma.com. Institute of Mathematics and Informatics, Moldova, Kishinev. P. 115.

Dubatovskaya M.V. dubatovska@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. P. 65.

Egamov A.I. albert810@yandex.ru. Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia.. P. 157.

Gladkov A.L. gladkoyal@mail.ru. Belarusian State University, Minsk, Belarus. P. 36.

Kuzenkov O.A. . P. 116.. Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

Medvedev A.V. . P. 116.. Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

Papkovich M.V. mpapkovich@yandex.by. Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Belarus. P. 68.

Primachuk L.P. rogosin@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. P. 65.

Rogosin S.V. rogosin@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. P. 65.

Rudzko J.V. janycz@yahoo.com. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. P. 37.

Skoromnik O.V. skoromnik@gmail.com. Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Belarus. P. 68.

Tashpulatov S.M. sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru. Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan. P. 69.

Zhalukevich D. S. den.zhal@yandex.by. Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Fizyki, Białystok, Poland,. P. 40, 118.

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения с частными производными

Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Ибадуллаева И.Н., Эберлейн Н.В. Особые варианты краевых задач в конусах	3
Акимов В.А. Об одном решении бигармонического уравнения с дополнительными условиями в частных производных	4
Андрушкевич И.Е. Обобщенный метод Фурье (ОМФ) в уравнении Бенджамина – Бона – Махони	6
Афанасьева Е.Б., Васильев В.Б., Лукинова О.Ю., Машинец А.А. О дискретных задачах в квадранте	8
Басик А.И., Грицук Е.В. Нерегуляризуемость канонической краевой задачи Римана–Гильберта для одной эллиптической системы в \mathbb{R}^3	10
Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М. О единственности решения одной нелокальной задачи для параболического уравнения с оператором Бесселя	11
Дайняк В.В. Об одной краевой задаче для линейного нестационарного уравнения составного типа	12
Демиденко Г.В., Бондарь Л.Н. Задача Коши для псевдогиперболических уравнений ..	14
Ленисов А.И., Денисов И.В. Решение задач с кубическими нелинейностями с помощью нелинейного метода угловых пограничных функций	16
Елгондиев К.К. Задача колебания мембраны, подвергающейся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени	16
Каянович С.С. О трехмерных уравнениях Навье – Стокса	18
Корзюк И.В., Ковнацкая О.А. Задача Пикара на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка	19
Корзюк И.В., Козловская И.С. Произвольного порядка гладкости классическое решение второй смешанной задачи в четверти плоскости для волнового решения	22
Лаптинский В.Н. Структура по Прандтлю решения задачи о тепловом пограничном слое в турбулентном сжимаемом течении	25
Миронова Л.Б. Краевая задача для уравнения пятого порядка с псевдопараболическим дифференциальным оператором	28
Отарова Ж.А., Бекиев А.Б. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями	29
Панов Е.Ю. К теории энтропийных суб- и суперрешений вырождающихся нелинейных параболических уравнений	30
Столярчук И.И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока в цилиндре	32
Устилко Е.В., Ломовцев Ф.Е. Смешанная задача для волнового уравнения при нестационарных характеристических первых косых производных на концах ограниченной струны	34
Шеметова В.В. Об одной краевой задаче в четверти пространства для псевдогиперболического уравнения	35
Gladkov A.L. Comparison principle for initial boundary value problem for nonlinear nonlocal parabolic equation	36
Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation	37
Zhalukevich D.S. Reduction of some evolutionary equations by means of symmetries	40
Интегро-дифференциальные и стохастические дифференциальные уравнения	
Жук А.И., Защук Е.Н. Обобщенные решения систем дифференциальных уравнений в пространствах Лебега	43
Задорожнюк А.О. Время перемешивания случайных блужданий на группах комплексных отражений	44

Игнатенко М.В. К вопросу операторного интерполирования и его погрешности в пространстве непрерывно дифференцируемых функций	45
Каландия Е.И. Об одной системе двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с параметрами	48
Калинин А.В., Тюхтина А.А., Бусалов А.А. Начально-краевая задача для нелинейной системы переноса излучения и статистического равновесия в плоско-параллельном слое	50
Калинин А.В., Тюхтина А.А., Метелева В.Е. Представления и оценки векторных полей во внешних областях	52
Мисюк В.Р. Одно отношение квазинорм высших производных рациональных функций ..	54
Нуржанов О.Д. О приближенном решении двухточечных краевых задач для полулинейных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра	55
Оснач Т.М., Рябченко Н.В., Старовойтов А.П. Аппроксимации Эрмита – Якоби для системы функций	57
Старовойтов А.П., Кечко Е.П., Оснач Т.М. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби	59
Танирбергенов М.Б. Формулы регуляризованных следов оператора Дирака с особенностью в потенциале	61
Фирсов М.А., Васьковский М.М. Существование и единственность решений эволюционных уравнений, управляемых грубыми траекториями в гильбертовом пространстве	62
Шилин А.П. О решении линейных интегро-дифференциальных уравнений высших порядков с переменными коэффициентами	65
Rogosin S.V., Primachuk L.P., M.V. Dubatovskaya Factorization of partly rational matrix of an arbitrary order	65
Skoromnik O.V., Papkovich M.V. Multi-dimensional integral transformation with Fox H-function in the kernel in the weighted spaces of summable functions	68
Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Second singlet state	69

Дифференциальные уравнения и их приложения

Астровский А.И. Оценка влияния значений параметров в модели диабета первого типа на уровень глюкозы в крови пациента	73
Веденяпин В.В. Вывод уравнения гравитации и электродинамики из принципа наименьшего действия и темная энергия	75
Волков В.М., Качаловская Е.И. Спектральный метод Чебышёва для эллиптических задач с разрывными коэффициентами	76
Володченкова Л.А., Гуц А.К. Оптимальное управление, поддерживающее плодородие почвы	77
Вувуникян Ю.М., Трифонова И.В., Чэнь Ваньли Нелинейные системные эволюционные операторы и их применение к математической модели искусственного интеллекта	78
Гринчик Н.Н., Заяц Г.М. Диффузия в смеси идеальных газов с учетом зависимости коэффициента диффузии от энтропии смешения	81
Дун Цзинхуэй Спектральный метод Чебышёва для решения двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными	83
Ерофеев В.Т., Громыко Г.Ф., Заяц Г.М. Моделирование экранирования импульсных электромагнитных полей намагниченными экранами из пермаллоя	85
Ивашкевич А.В., Редьков В.М. Векторная частица с аномальным магнитным моментом в присутствии электрического и магнитного полей	88
Ивашкевич А.В., Редьков В.М. Частица со спином $3/2$ в кулоновском поле, нерелятивистское приближение	89
Карпиеня М.В. Применение дифференциальных уравнений для моделирования рисков конкурентоспособности регионов	91
Курбанбаев О.О., Джакаева К.Д. Применение типа функции Коши для решения линейного дифференциального уравнения	93

Мацука Н.П., Авлас А.Н., Громыко Г.Ф., Ильющенко А.Ф., Лешок А.В. Численное моделирование коэффициента теплопроводности для конструирования композиционных материалов	94
Переварюха А.Ю. Детерминированные и стохастические уравнения для анализа инвазивных процессов в биосистемах	96
Проневич А.Ф. Многофакторные производственные функции, учитывающие нейтральный по Хиксу научно-технический прогресс	99
Русилко Т.В., Паньков А.В. О дифференциальных уравнениях, определяющих показатели эффективности сетевой стохастической модели колл-центра	100
Сабатулина Т.Л. Об асимптотических свойствах решений нескольких моделей динамики популяций с распределенным запаздыванием	102
Скорцова М.А. Устойчивость положений равновесия в модели «хищник-жертва» с двумя запаздываниями	104
Статкевич С.Э. Прогнозирование доходов НМ-сети с ограниченным временем ожидания разнотипных заявок и ненадежным обслуживанием	105
Таранчук В.Б., Баровик Д.В. Компьютерная модель, интерактивные средства анализа и визуализации динамики низовых лесных пожаров	106
Фимин Н.Н., Чечеткин В.М. Уравнение Власова – Пуассона и его применение к задачам космологии	108
Чуйко М.М., Королёва О.М. Решение краевых задач для уравнения теплопроводности в двумерных нерегулярных областях	110
Шушкевич Г.Ч. Моделирование электростатического поля внутри бесконечного цилиндрического экрана в присутствии тора	113
Dryuma V. Geodesics of Riemannian metrics related to the Navier–Stokes equations and their applications	115
Medvedev A.V., Kuzenkov O.A. Generalization of the Abrams – Strogatti model of language dynamics to the case of several languages	116
Zhalukevich D.S. Methods for solving algebraic equations in the theory of linear differential equations	118

Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

Березкина Л.Л., Глецевич М.А., Егоров А.А., Магонь Н.С., Рушнова И.И., Филиппова Н.К., Чехменок Т.А. Об учебном пособии «Высшая математика в приложениях и задачах» с элементами QR-кодирования	120
Булатов В.И. О функциональном аналоге неравенства Бернулли	121
Воронова Н.П., Мороз О.А. К вопросу о проведении математических олимпиад в техническом вузе	123
Глецевич М.А., Шилин А.П. О линейных дифференциальных уравнениях для внепрограммного изучения	124
Дайняк В.В., Чеб Е.С. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка	126
Деревяго А.Н., Егоров А.А., Рушнова И.И. О некоторых изменениях в методике проведения практических занятий по дисциплине «Методы математической физики» на физическом факультете Белорусского государственного университета	127
Деревяго А.Н., Кононова О.А. Интегральные уравнения Вольтерра типа свертки	130
Зеленков В.И. Коллоквиумы по математическим дисциплинам для студентов физического факультета	132
Ильинкова Н.И., Рушнова И.И., Чехменок Т.А. Об учебном пособии «Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Теория и тесты»	135
Кастрица О.А., Мазаник С.А. Единый подход к определению интегралов различного типа при изучении математического анализа	136
Майоровская С.В. Управляемая самостоятельная работа как способ развития субъектности студента в образовательном пространстве вуза	137
Марченко И.В. Структурно-логические схемы в преподавании дифференциального исчисления	139

Мателенок А.П., Вакульчик В.С., Завистовская Т.И. Формирование базовых профессиональных компетенций у студентов химико-технологических специальностей при изучении модуля «Дифференциальные уравнения»	141
Новичкова Д.А. Применение информационных технологий на занятиях по математическому анализу	142
Прокашева В.А., Расолько Г.А., Лысак В.В. Дифференциальные модели в биологии	143
Радыно Н.Я. О свойствах русского языка и происхождении некоторых базовых математических понятий	145
Размыслович Г.П., Филиппов А.В. Об учебном пособии «Геометрия и алгебра» для студентов факультета прикладной математики и информатики БГУ	147
Расолько Г.А., Кремень Е.В., Кремень Ю.А. Об использовании систем компьютерной математики в процессе обучения математическим дисциплинам	149
Сметанин Ю.М., Сметанина Л.П. Методика преподавания математики, компенсирующая пробелы образования абитуриентов	151
Старовойтова Е.Л. Организация активного обучения студентов на основе проблемных ситуаций при изучении математики в техническом вузе	153
Чернявская С.В., Хотомцева М.А. Некоторые аспекты математической подготовки студентов на факультете транспортных коммуникаций БНТУ	155
Egamon A.I. Advantages of laboratory work on applied discrete optimization problems	157
Авторы докладов	159

Научное издание

**XXI Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(Еругинские чтения – 2023)**

Материалы конференции
(Могилев, 23 – 27 мая 2023 года)

В двух частях

Часть 2

**Авторы несут персональную ответственность
за содержание публикуемых материалов**

Редакторы *В. В. Амелькин, А. Б. Антонецвич,
А. И. Астровский, М. М. Васьковский, А. Л. Гладков,
В. И. Громак, А. К. Деменчук, С. А. Мазаник, И. И. Маковецкий, Е. К. Макаров*
Компьютерный дизайн *А. К. Деменчук, Е. К. Макаров, И. И. Маковецкий*

Подписано в печать 18.05.2023. Формат 60 × 84¹/8. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 20,00. Уч.-изд. л. 10,56. Тираж 85 экз. Заказ № 586.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.